

7 Escoamento Compressível

7.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos os conceitos fundamentais de escoamento compressível em dutos, com destaque para o escoamento de gás em bocais com área variável sem atrito viscoso.

No escoamento compressível a massa específica tende a variar significativamente. Assim, da equação de estado (1.44), conclui-se que a pressão e a temperatura também variam de forma substancial. Portanto, a componente térmica da equação de energia não pode ser ignorada. A solução do problema envolve quatro equações de conservação: de massa, quantidade de movimento, energia e estado.

Aplicações industriais nesta área incluem problemas termo-hidráulicos de válvulas, orifícios, bocais, dutos curtos e dutos longos. Dada a grande complexidade dos escoamentos nessas situações freqüentemente são introduzidas nas soluções uma ou mais das seguintes hipóteses simplificadoras: idealidade de gás, ausência de atrito viscoso, ausência de troca de calor entre o fluido e o exterior, ausência de variação da temperatura e irreversibilidade do processo. Neste, e no próximo capítulo analisamos diversas configurações de dutos e dispositivos onde essas hipóteses são consideradas. Iniciamos com a abstração de idealidade do gás e prosseguimos para situações mais complexas e realistas, onde essas restrições são relaxadas.

Gás Perfeito

Em princípio o escoamento compressível pode ser aplicado para qualquer fluido, ou seja, gás ou líquido, definido por qualquer equação de estado. Entretanto, para muitos problemas reais podemos obter soluções aproximadas muito próximas dos valores práticos a partir da hipótese de idealidade, o que torna a abordagem do problema muito mais fácil. Veremos posteriormente como introduzir correções na “solução ideal” ao considerarmos a equação de estado para fluido real, não ideal.

Para gás ideal consideramos que os calores específicos são constantes, independentes da temperatura e pressão

$$p = \rho R_g T \quad R_g = c_p - c_v = \text{const.} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{const.} \quad \therefore \frac{R_g}{c_v} = \gamma - 1 \quad (7.1)$$

No caso real, tanto c_p e c_v quanto γ (razão dos calores específicos) variam com a temperatura e pressão, em geral moderadamente. Por exemplo, c_p do ar varia cerca de 30% para a faixa de temperatura entre 0 °C e 2500 °C.

Deve ser lembrado que a constante do gás R_g §1.4.2 está relacionada com a constante Universal dos gases R^* e a massa molecular do gás M_g

$$R_g = \frac{R^*}{M_g} \quad (7.2)$$

onde $R^* = 8314,462 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{kmol}\cdot\text{s}^2\cdot\text{K}$ ($= 8,314462 \text{ kJ}/\text{kmol}\cdot\text{K}$). Ver Apêndice-E.

Para ar $M_{ar} = 28,9625 \text{ kg}/\text{kmol}$ e $\gamma_{ar} = 1,40$, logo

$$\begin{aligned} R_{ar} &= \frac{8314,462}{28,9625} = 287,077 \text{ m}^2/\text{s}^2\cdot\text{K} \\ c_p &= \frac{\gamma R_{ar}}{\gamma - 1} = 1005 \text{ m}^2/\text{s}^2\cdot\text{K} \\ c_v &= \frac{R_{ar}}{\gamma - 1} = 718 \text{ m}^2/\text{s}^2\cdot\text{K} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sendo os calores específicos constantes, as variações da energia interna \hat{u} e entalpia h para um gás perfeito são calculadas

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad (7.4)$$

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

Caso os calores específicos sejam variáveis, devem ser obtidos por integração $\hat{u} = \int c_v dT$ e $h = \int c_p dT$.

A densidade relativa do gás λ_g é definida como a razão entre a massa molecular do gás e a massa molecular do ar na condição padrão (20 °C e $p = p_{atm}$)

$$\lambda_g = \frac{M_g}{M_{ar}} \quad (7.5)$$

Combinando (7.2) e (7.5) a densidade relativa pode ser também escrita como

$$\lambda_g = \frac{R_{ar}}{R_g} \quad (7.6)$$

logo, a constante do gás pode ser assim obtida

$$R_g = \frac{R_{ar}}{\lambda_g} \quad (7.7)$$

Na literatura é freqüente não utilizar o subscrito-g na constante do gás. Desta forma, na eventualidade de se ler R , estamos nos referindo à constante do gás R_g em estudo, e não à constante universal R^* .

Processo Isentrópico

Com freqüência o processo isentrópico é utilizado como um modelo ou limite para processos adiabáticos reais. Se a entropia é constante em cada passo do processo podemos obter relações isentrópicas calculando a variação de entropia para uma substância pura a partir das equações da termodinâmica – lembre-se que $h = \hat{u} + pv$

$$Tds = \hat{d}u + p dv = dh - v dp = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (7.8)$$

Introduzindo a Eq. (7.1) e a relação para gás ideal $dh = c_p dT$ e resolvendo para ds

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_g \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R_g \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (7.9)$$

Para escoamento isentrópico $s_2 = s_1$, para a qual obtém-se a relação

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (7.10)$$

ou ainda

$$p = C_1 \rho^\gamma = C_2 T^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (C_1 \text{ e } C_2 = \text{const.}) \quad (7.11)$$

O cálculo da variação da entalpia é um parâmetro importante num processo isentrópico, podendo ser calculado a partir da temperatura inicial e da razão das pressões como (subscrito-s representa condição à entropia constante)

$$(h_2 - h_1)_s = c_p (T_2 - T_1)_s = c_p T_1 \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)_s - 1 \right] = c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\frac{\gamma-1}{\gamma} - 1 \right] \quad (7.12)$$

7.2 A Velocidade do Som – Número de Mach

A velocidade do som é a velocidade para a qual um pequeno distúrbio na pressão viaja por uma substância, também denominado “propagação acústica”. Estamos interessados em relacionar a velocidade de propagação c com mudanças nas propriedades da substância. Consideremos um tubo cheio de gás estacionário onde um pistão desloca-se com velocidade dV para a direita, Fig. 7.1. Uma onda de pressão se propagará pelo tubo. Atrás da onda o gás desloca-se com a velocidade dV à pressão $p+dp$ e massa específica $\rho+dp$. Na frente, o gás ainda “desconhece” o movimento do pistão porque a informação do movimento ainda não chegou lá, permanecendo assim imóvel por algum tempo.

Propriedades como pressão, massa específica e entalpia estão indicadas na figura. O escoamento na frente de onda é considerado isentrópico, i.e., atrito e transferência de calor são desprezíveis no pequeno volume de controle que a envolve. Para evitar regime não-permanente adotamos um volume que se desloca com a velocidade da frente de onda para a direita. Para um observador neste volume de controle a onda parece estacionária e o fluido parece se deslocar da direita para esquerda com velocidade c .

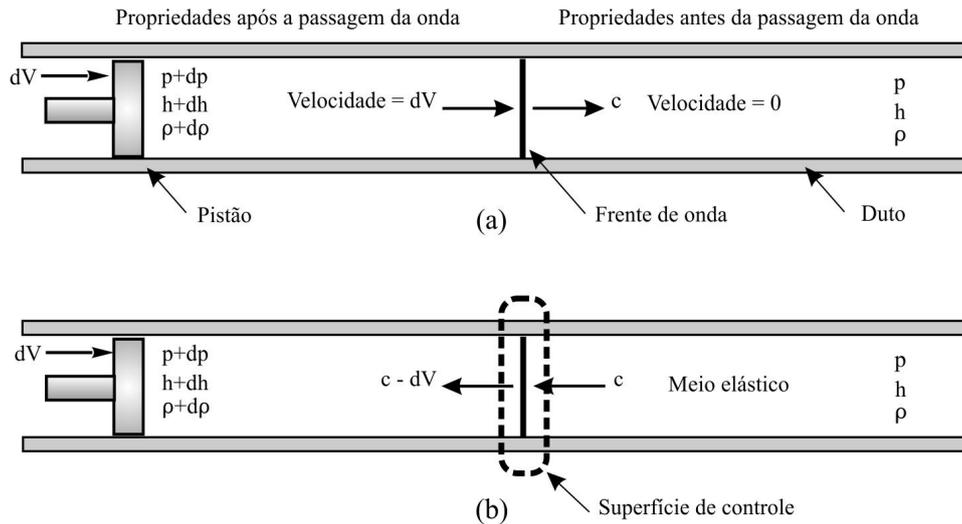


Figura 7.1 Diagrama ilustrando a propagação acústica num meio elástico no interior de um duto: a) observador estacionário; b) observador deslocando-se com a frente de onda.

O escoamento é permanente e unidimensional a montante da frente de onda. Aplicando a equação de continuidade no volume de controle

$$\rho A c = (\rho + \delta\rho) A (c - \delta V) \quad (7.13)$$

então

$$\delta V = c \frac{\delta\rho}{\rho + \delta\rho} \quad (7.14)$$

Observe que não existe gradiente de velocidade em nenhum dos lados da frente de onda. Para gases, a espessura típica da frente é da ordem de 0,01 mm. Portanto, podemos ignorar o atrito e aplicar as equações de quantidade de movimento (2.2.22) e de continuidade acima (7.13)

$$\sum F = pA - (p + \delta p)A = \dot{m}(V_{out} - V_{in}) = (\rho A c)(c - \delta V - c) \quad (7.15)$$

Resolvendo para a variação de pressão obtém-se a **Equação de Euler, ou de Joukowski**¹,

¹ Nikolay Yegorovich Zhukovsky (1847–1921), engenheiro russo em dinâmica dos fluidos.

$$\delta p = \rho c \delta V \quad (7.16)$$

Finalmente, combinando (7.14) com (7.16), e ignorando termos de ordem superior

$$c^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (7.17)$$

onde o subscrito s refere-se à condição isentrópica (entropia constante), assim admitida porque as variações de pressão e temperatura são muito pequenas, tornando o processo praticamente reversível. Além disso, o fato deste ser muito rápido, juntamente com a hipótese de variação reduzida para a temperatura, torna o processo adiabático. No limite, para um onda infinitesimal, este pode ser considerado reversível e adiabático, isto é, isentrópico.

Velocidade do Som para Gases Ideais ²

Levando (7.1) e (7.11) em (7.17) obtém-se a expressão para a velocidade do som para um gás ideal

$$c = \sqrt{\gamma_g R_g T} = \sqrt{\frac{\gamma_g R_{ar} T}{\lambda_g}} = \sqrt{\frac{\gamma_g R^* T}{M_g}} \quad (7.18)$$

que mostra que, gases com baixa densidade têm velocidades de som maiores, e vice-versa. Por exemplo, ar na temperatura normal $c \approx 20 T^{1/2}$. Ou seja, a 20 °C ($T = 293,2$ °K), $c_{ar} \approx 342$ m/s; enquanto hidrogênio ($\gamma = 1,4$ e $M_g = 2$), $c_{H_2} \approx 1300$ m/s.

Velocidade do Som num Líquido

A velocidade do som num líquido pode ser estimada a partir da definição do módulo de elasticidade, §1.4.35a que fornece a relação, a partir de (7.17),

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \sqrt{\frac{K_T}{\rho_l}} \quad (7.19)$$

² De (7.11), $p = C\rho^\gamma \therefore c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma C\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho^\gamma} \rho^{\gamma-1} \therefore c = \sqrt{\gamma_g R_g T}$ *c.q.d.*

Para água a 20 °C o valor aproximado para o módulo de compressibilidade é $K_T = 2,2 \times 10^9$ Pa; logo $c_{H_2O} \approx 1480$ m/s.

Número de Mach

O número de Mach³ é definido como a razão da velocidade do fluido para a velocidade do som

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (7.20)$$

A velocidade do som deve ser calculada na pressão e temperatura local, podendo variar de ponto a ponto no campo do escoamento. Veremos mais adiante que este parâmetro aparece quase sempre nas equações do movimento quando a compressibilidade é um fator importante do escoamento. Para fluidos ou substâncias com baixa compressibilidade ($K_T \rightarrow 0$) o número de Mach tende para infinito, e vice-versa.

Observemos que o quadrado do número de Mach, $Ma^2 = V^2/c^2$, pode ser interpretado como a razão da energia cinética para a energia térmica local uma vez que a energia cinética é proporcional a V^2 e a energia térmica a c^2 , ou T, Eq. (7.18).

7.3 Estados de Estagnação

Para analisar o escoamento por dutos é conveniente estabelecer alguns estados de referência relativos aos quais outras quantidades poderão ser calculadas. Consideremos por exemplo o escoamento por um bocal que recebe gás proveniente de um reservatório, conforme esquematizado na Fig. 7.2. Um estado de referência óbvio para este exemplo é definido pela condição no reservatório onde a velocidade do fluido é praticamente nula. De fato, propriedades do fluido medidas no estado de velocidade zero, denominado

³ Ernst Mach (1838-1916), um dos fundadores da aerodinâmica supersônica.

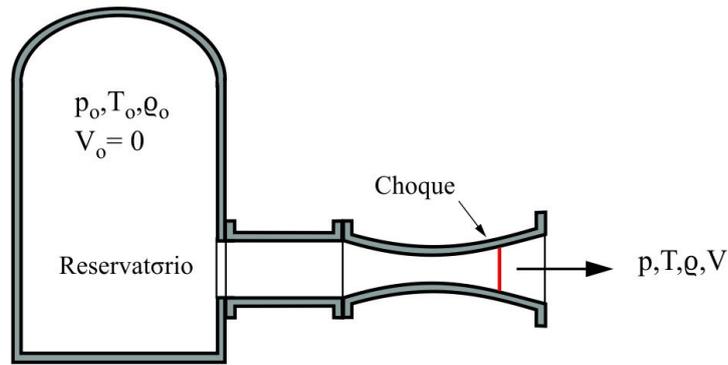


Figura 7.2 Escoamento num bocal a partir de um reservatório.

estado de estagnação, são quantidades bastante úteis na análise de escoamentos compressíveis em geral.

Analisemos por outro lado o escoamento conforme sugerido na Fig. 7.3. Sendo compressível, o aumento da pressão no ponto de estagnação S (velocidade nula) provocará compressão do fluido e aumento da massa específica ρ_0 e da temperatura T_0 em S. O efeito da compressibilidade dependerá da magnitude da velocidade de aproximação V ; será grande para altas velocidades e pequeno para velocidades menores. Neste processo a energia cinética do fluido de aproximação é transformada em aumento de energia de pressão e energia interna, observada por um aumento da temperatura local.

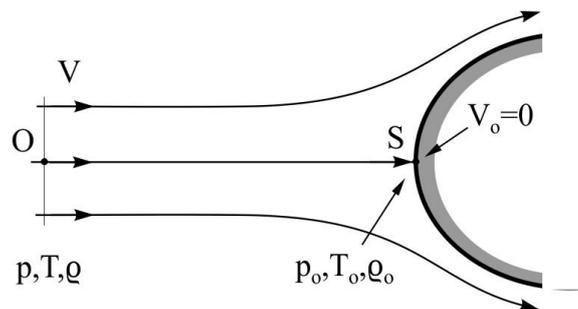


Figura 7.3 Escoamento na direção de um ponto de estagnação S.

Três quantidades são frequentemente definidas como de referência:

- *Pressão de estagnação (ou pressão total)*. É a pressão medida quando se leva o escoamento à velocidade nula, sem perdas (isentropicamente);
- *Temperatura de estagnação (ou temperatura total)*. É a temperatura

medida quando se leva o escoamento à velocidade nula sem transferência de calor (adiabaticamente);

- *Massa específica de estagnação (ou total)*. É a massa específica medida quando se leva o escoamento à velocidade nula, sem perdas (isentropicamente).

Essas quantidades podem se relacionar com outras, conforme descrito a seguir. Suponhamos que um sensor de temperatura seja inserido no escoamento e provoque uma desaceleração do escoamento até a velocidade nula, Fig. 7.3, sem transferência de calor. A aplicação da equação de energia entre os pontos O e S, Eq. (2.4.12), torna-se

$$\left(h + \frac{V^2}{2}\right)_O = \left(c_p T + \frac{V^2}{2}\right)_O = \left(h + \frac{V^2}{2}\right)_S = h_o = c_p T_o \quad (7.21)$$

onde h_o é a entalpia de estagnação. Utilizando a relação entre entalpia e temperatura para gases perfeitos, $h = c_p T$, das Eqs. (7.1), (7.18) e (7.21)

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \quad (7.22)$$

onde Ma é o número de Mach. Devemos lembrar que T_o é simplesmente uma temperatura de referência, definida em um ponto particular. O escoamento de gás numa passagem pode estar longe de ser adiabático e, assim, T_o pode variar de ponto a ponto.

Observemos, por exemplo, que se o bocal da Fig. 7.2 estiver isolado termicamente, a temperatura de estagnação será constante ao longo do escoamento e igual a temperatura do reservatório para todos os propósitos. Para provar isso consideremos o escoamento num duto mostrado na Fig. 7.4.

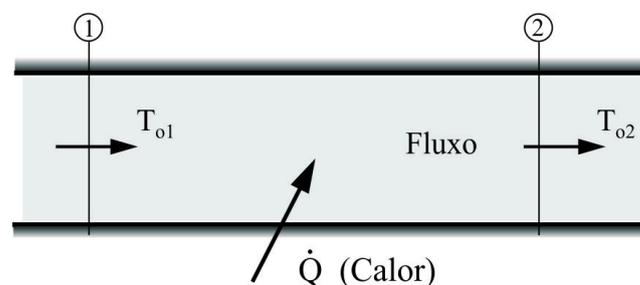


Figura 7.4 Escoamento unidimensional com transferência de calor

Aplicando a equação de energia (2.4.12) entre as seções 1 e 2 para regime permanente e sem trabalho de eixo

$$\dot{Q} = \left[\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \right] \dot{m} = (h_{o2} - h_{o1}) \dot{m} = c_{po} (T_{o2} - T_{o1}) \dot{m} \quad (7.23)$$

que mostra que a variação na temperatura de estagnação é uma medida da quantidade de calor trocado entre as duas seções. Portanto, para um processo adiabático em regime permanente, onde $Q=0$, a temperatura de estagnação permanece constante, i.e., $T_{o2}=T_{o1}$. A pressão de estagnação, assim como a massa específica de estagnação, decresce ao longo do sistema devido aos efeitos de atrito e perdas por mistura (turbulência); reveja (2.4.23); os dois processos convertem energia de pressão em energia interna.

Combinando (7.10) ou (7.11) com (7.22) obtém-se para a condição isentrópica

$$\frac{p_o}{p} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.24)$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{1/(\gamma-1)}$$

Das Eqs. (7.11) e (7.24) conclui-se que num processo isentrópico (adiabático e reversível, i.e., sem perdas), a pressão de estagnação p_o , assim como a massa específica de estagnação ρ_o permanecem constantes – uma vez que T_o é constante, cf. (7.11) e (2.4.22), com $w_f=0$. Portanto, num processo isentrópico, conhecidos os valores de estagnação num ponto esses podem ser utilizados ao longo de todo o escoamento como referências; são constantes!

As razões de estagnação para a temperatura, pressão e massa específica estão mostradas na Fig. 7.5 para $\gamma=1,4$. Observe que neste gráfico particular estão mostradas as razões inversas de (7.22) e (7.24); i.e., T/T_o , p/p_o e ρ/ρ_o .

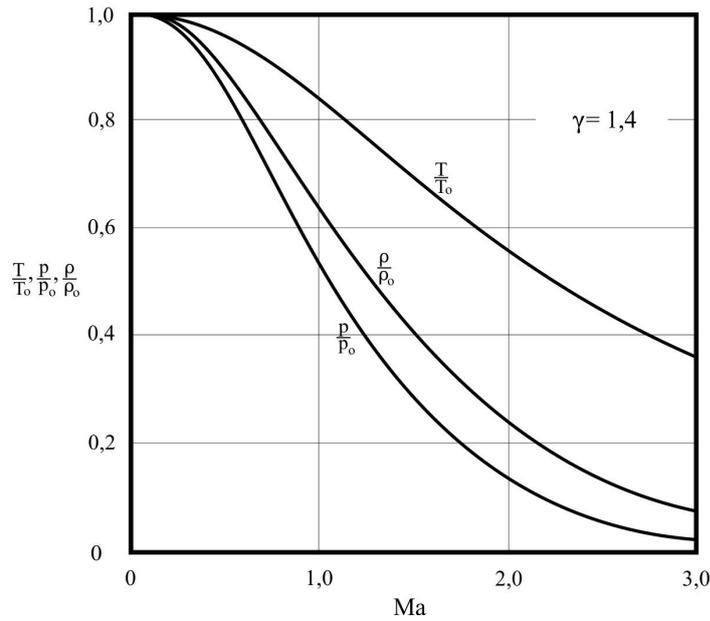


Figura 7.5 Propriedades adiabáticas (T/T_0) e isentrópicas (p/p_0 e ρ/ρ_0) vs. número de Mach ($\gamma = 1,4$).

Valores Críticos no Ponto de Velocidade Sônica

O estado termodinâmico onde o escoamento é sônico pode ser também utilizado como referência importante para o escoamento isentrópico. Neste caso, as propriedades sônicas, ou críticas, são identificadas por asteriscos: T^* , p^* e ρ^* . Fazendo $Ma = 1$ nas Eqs. (7.22) e (7.24) obtém-se as Eqs. (7.25).

Nos escoamentos isentrópicos todas as propriedades críticas são constantes. Em um escoamento adiabático, não-isentrópico, T^* é constante – uma vez que T_0 é constante, Eq. (7.25a) –, mas p^* e ρ^* podem variar (p_0 e ρ_0 não são constantes, Eqs. (7.25b,c)):

$$\begin{aligned} \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{\gamma + 1} \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[\frac{T^*}{T_0} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{1/(\gamma-1)} = \left[\frac{p^*}{p_0} \right]^{1/\gamma} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Valores típicos para razões críticas para alguns gases são mostrados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 Razões críticas para algumas substâncias.

Substância	Fórmula	γ	p^*/p_0	T^*/T_0
Ar	--	1,4	0,528	0,833
Metano	CH ₄	1,299	0,546	0,87
Propano	C ₃ H ₈	1,126	0,579	0,941
Butano	C ₄ H ₁₀	1,091	0,586	0,956
Amônia	NH ₃	1,297	0,546	0,871
Dióxido de carbono	CO ₂	1,289	0,548	0,874
Vapor úmido	H ₂ O	1,13	0,578	0,939
Vapor seco	H ₂ O	1,327	0,54	0,859

A velocidade crítica V^* é definida como sendo a própria velocidade do som, sendo muitas vezes utilizada como uma velocidade de referência tanto no escoamento isentrópico quanto adiabático

$$V^* = c^* = (\gamma R_g T^*)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} R T_0 \right)^{1/2} \quad (7.26)$$

Observe que V^* é uma velocidade de referência, com valor fixo, não devendo ser confundida com o valor da velocidade real local do som. $V^* = c^*$ é o valor da velocidade correspondente à velocidade sônica, existindo esta ou não no escoamento.

A utilidade dos valores críticos se tornará mais evidente nas aplicações envolvendo o escoamento em dutos com atrito e transferência de calor.

Funções para a Vazão de Massa (Escoamento Subsônico)

Podemos utilizar as relações para gás ideal, assim como para a pressão e temperatura de estagnação (ou condição crítica), para escrever funções extremamente convenientes para o cálculo de vazão de massa em dutos em geral sob condição subsônica. Começemos pela definição de vazão de massa para fluido ideal

$$\dot{m} = A \rho V = A \frac{p}{RT} Ma \sqrt{\gamma RT} = A p Ma \sqrt{\frac{\gamma}{RT}} \quad (7.27)$$

ou, em termos da temperatura e pressão de estagnação e temperatura crítica, Eqs. (7.22 e 7.25), podemos definir as quatro seguintes funções, variações de 7.27

$$\begin{aligned}
 F_1(\gamma, Ma) &= \frac{\dot{m}\sqrt{RT}}{Ap} = \gamma^{1/2} Ma \\
 F_2(\gamma, Ma) &= \frac{\dot{m}\sqrt{RT_o}}{Ap} = \gamma^{1/2} Ma \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{1/2} \\
 F_3(\gamma, Ma) &= \frac{\dot{m}\sqrt{RT_o}}{Ap_o} = \frac{\gamma^{1/2} Ma}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \\
 F_4(\gamma, Ma) &= \frac{\dot{m}\sqrt{RT^*}}{Ap} = \gamma^{1/2} Ma \left[\frac{2 + (\gamma-1)Ma^2}{\gamma+1} \right]^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{7.28}$$

Os gráficos das variações da pressão de estagnação p/p_o , (7.24a) e funções F_2 e F_3 com o número de Mach estão mostrados nas Figs. 7.6, 7.7 e 7.8 para alguns valores do expoente isentrópico γ no intervalo $0 < Ma < 1$. Valores numéricos podem ser facilmente obtidos a partir de um programa de computador, por exemplo.

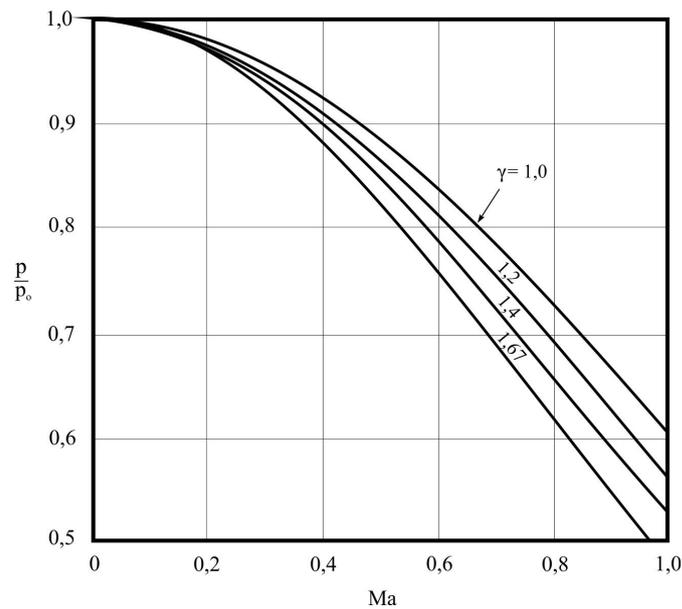


Figura 7.6 Razão da pressão estática para a pressão de estagnação vs. o número de Mach.

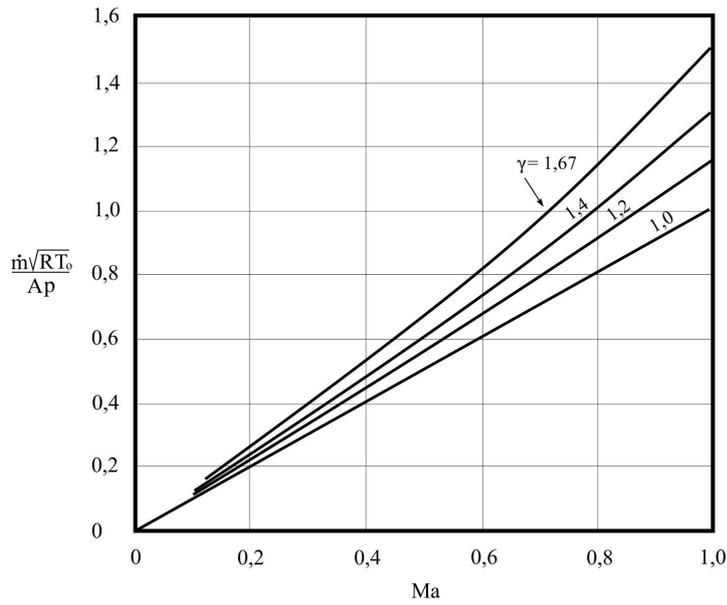


Figura 7.7 Função de vazão de massa (pressão estática e temperatura de estagnação) vs. número de

Mach:
$$F_2 = \frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{Ap}$$

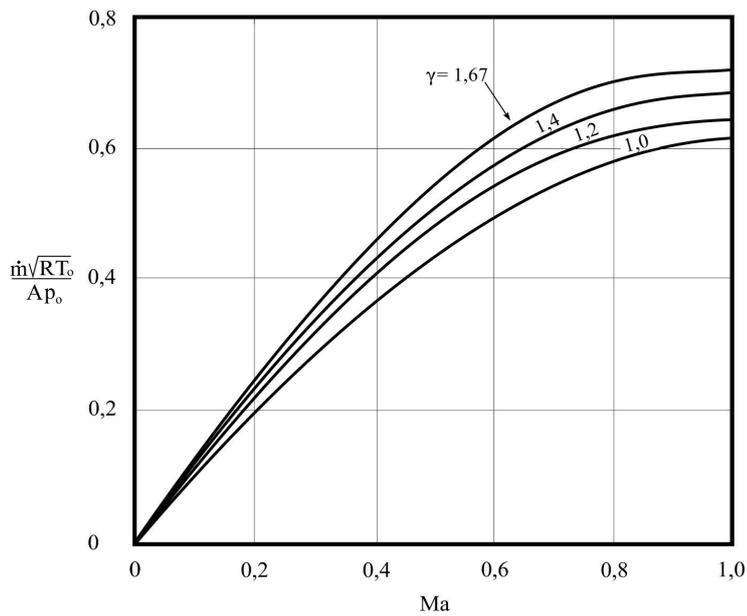


Figura 7.8 Função de vazão de massa (pressão e temperatura de estagnação) vs. número de Mach:

$$F_3 = \frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{Ap_0}$$

7.4 Escoamento Isentrópico com Variação de Área

Combinando relações para escoamentos isentrópicos ou adiabáticos com a equação de continuidade pode-se estudar diversos problemas práticos reais de escoamento compressível.

Consideremos o escoamento unidimensional por um bocal convergente-divergente, esquematizado na Fig. 7.9. Como vimos, um fluido real mantém condição de não-deslizamento na parede do duto, com um perfil de velocidade $V(x,r)$ que varia na seção transversal. Se, contudo, a variação na seção for pequena, e o raio de curvatura grande, numa primeira aproximação o escoamento pode ser considerado quasi-unidimensional, independente do raio, com $V \approx V(x)$, simplesmente reagindo à variação da área $A(x)$.

Admitindo escoamento permanente, a equação de continuidade assume a forma

$$\dot{m} = \rho VA = \text{const.} \quad (7.29)$$

ou, na forma diferencial

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (7.30)$$

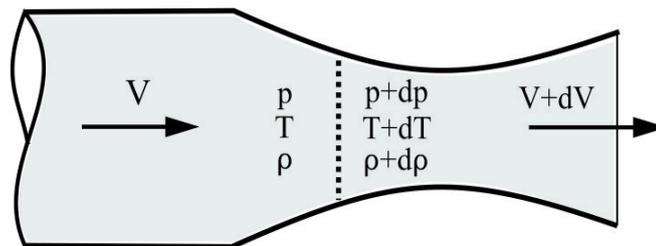


Figura 7.9 Escoamento isentrópico num bocal convergente-divergente.

As formas diferenciais das equações de quantidade de movimento e energia, assim como a relação para a velocidade do som para escoamento isentrópico são aqui lembradas. Respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\rho} + VdV &= 0 \\ dh + VdV &= 0 \\ dp - c^2 d\rho &= 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Combinando essas quatro equações obtém-se relações entre as variações de velocidade, pressão, temperatura, área e o número de Mach

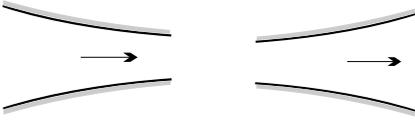
$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1} = - \frac{dp}{\rho V^2}$$

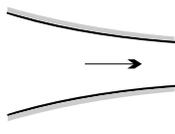
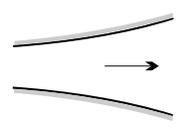
$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{Ma^2 - 1}{Ma \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} Ma\right)} d(Ma)$$
(7.32)

Essas equações permitem concluir como a velocidade, a pressão, a temperatura e o número de Mach variam com a área do duto. O resultado está resumido na Tabela 7.2. Uma conclusão importante segue da Eq. (7.32c). Se o escoamento passa de subsônico a supersônico (ou vice-versa), em algum ponto ele deve assumir um número de Mach igual à unidade. Quando isto ocorre, $dA = 0$, uma vez que o lado direito de (7.32c) troca de sinal no entorno de $Ma = 1$. Da consideração da variação da área com o número de Mach para

Tabela 7.2 Variação de parâmetros com a área para escoamento isentrópico

Escoamento Subsônico ($Ma < 1$)		
Parâmetro		
Área	decrece	cresce
Velocidade	cresce	decrece
Pressão	decrece	cresce
Temperatura	decrece	cresce
No. de Mach	cresce	decrece

Escoamento Supersônico ($Ma > 1$)		
Parâmetro		
Área	decrece	crece
Velocidade	decrece	crece
Pressão	crece	decrece
Temperatura	crece	decrece
No. de Mach	decrece	crece

escoamento subsônico ($Ma < 1$) e supersônico ($Ma > 1$), concluímos que $dA = 0$ implica que A atingiu um valor mínimo. Denominando a seção transversal mínima de “garganta”, concluímos que a transição entre os regimes subsônico e supersônico num escoamento isentrópico só pode ocorrer se o escoamento passar por uma garganta. Por outro lado, $dA = 0$ não implica necessariamente que $Ma = 1$; podemos concluir somente que $Ma = 1$ ou $d(Ma) = 0$. Lembramos ainda que, sendo o escoamento isentrópico, a pressão e a temperatura de estagnação são constantes no escoamento, (7.23) e (7.11). Desta forma as equações (7.22) e (7.24) para estados de estagnação são válidas.

Relações para Gases Perfeitos

Podemos utilizar a equação de estado para os gases perfeitos – assim como as relações para escoamento isentrópico – para converter a equação de continuidade (7.29) numa relação algébrica envolvendo somente a área e o número de Mach. Para tanto igualemos o fluxo de massa em qualquer seção com o fluxo de massa para a condição sônica – podendo realmente não existir no duto. Denominando a condição em $Ma=1$ com um asterisco

$$\dot{m} = \rho VA = \rho^* V^* A^*$$

então

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} \quad (7.33)$$

onde os dois termos do lado direito são funções exclusivas do número de Mach para escoamento isentrópico. Senão vejamos, de (7.24-25)

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^* \rho_o}{\rho_o \rho} = \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)Ma^2 \right] \right\}^{1/(\gamma-1)} \quad (7.34)$$

e de (7.25) e (7.26)

$$\begin{aligned} \frac{V^*}{V} &= \frac{(\gamma RT^*)^{1/2}}{V} = \frac{(\gamma RT)^{1/2}}{V} \left(\frac{T^*}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{Ma} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)Ma^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Combinando (7.33) e (7.35) chega-se ao resultado

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)Ma^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right]^{2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (7.36)$$

mostrado no gráfico da Fig. 7.10 para alguns valores de γ . Desta forma podemos resolver qualquer problema de escoamento isentrópico em bocais – sem formação de choque –, conhecido o estado de estagnação e a geometria do bocal. A solução começa com a determinação do número de Mach resolvendo-se (7.36) para a relação especificada de $A(x)/A^*$ (observe que esta solução envolverá alguma iteração). Uma vez determinado Ma , as relações (7.22) e (7.24) fornecerão valores de distribuição para a pressão, temperatura e massa específica $p(x)$, $T(x)$ e $\rho(x)$.

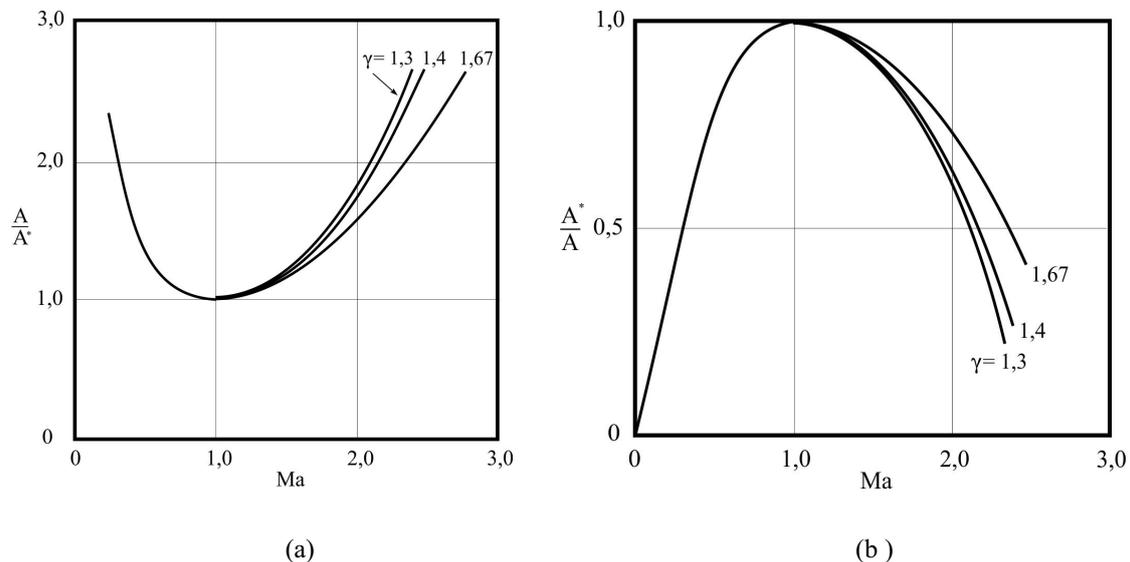


Figura 7.10 Variação de A/A^* e A^*/A com Ma para escoamento isentrópico.

A Fig. 7.10a mostra que a área mínima que pode ocorrer num escoamento isentrópico é a área correspondente à garganta crítica, ou sônica, isto é, a relação A/A^* é igual ou superior a 1 ($A/A^* \geq 1$). Em muitos escoamentos uma garganta crítica sônica não existe realmente; nesses casos o escoamento é *totalmente subsônico* ou, muito raramente, *totalmente supersônico*.

Condição Crítica (*Choking*)

Da Eq. (7.33) a relação inversa A^*/A é igual a $\rho V / \rho^* V^*$, ou seja, o fluxo de massa por unidade de área em qualquer seção comparado com o fluxo de massa crítico (onde $Ma = 1$) por unidade de área. Da Fig. 7.10b podemos observar que esta razão (inverso da ordenada de (a)) sobe de zero para $Ma = 0$ até a unidade em $Ma = 1$ e, em seguida, decresce para zero de novo para altos valores de Ma . Portanto, para condição de estagnação conhecida o fluxo de massa por um duto atinge um valor máximo quando sua

garganta está sob condição crítica, ou sônica. O duto é dito estar sob *condição crítica*, ou afogado (*choked*), não permitindo a passagem de maior fluxo de massa a menos que a área da garganta seja aumentada. Se a garganta for reduzida o fluxo de massa reduz-se também.

Assim a condição crítica ocorre no momento em que a razão da pressão na garganta para a pressão de estagnação é tal que a velocidade na garganta é sônica. Portanto, de (7.25b),

$$\frac{p^*}{p_o} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.37)$$

O fluxo máximo pode ser calculado a partir de (7.26) e (7.29)

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\max} &= \rho^* A^* V^* = \rho_o \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} A^* \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} R T_o \right)^{1/2} \\ &= \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_o A^*}{\sqrt{R T_o}} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Ou seja, no escoamento isentrópico, o fluxo de massa máximo é proporcional à área da garganta, da pressão de estagnação e inversamente proporcional à raiz quadrada da temperatura de estagnação.

Pode-se ainda reescrever esta equação na forma adimensional

$$\frac{\dot{m}_{\max} \sqrt{R T_o}}{p_o A^*} = \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (7.39)$$

7.5 Operação de Bocais Convergentes e Divergentes

Pela combinação das relações para o escoamento isentrópico e de choque normal (não analisado aqui) acrescentados aos conceitos de afogamento sônico em gargantas pode-se analisar algumas características básicas do comportamento termodinâmico de bocais convergentes e divergentes.

Bocal Convergente

Consideremos o bocal convergente esquematizado na Fig. 7.11a. Um reservatório está instalado a montante com pressão de estagnação p_o . O escoamento é provocado reduzindo-se a pressão externa a jusante p_b para valores abaixo de p_o , resultando numa seqüência de estados (a) até (e) mostrado na Fig. 7.11.

Para uma queda moderada de p_b , entre os estados (a) e (b), a pressão na garganta é superior ao valor crítico p^* , que poderia torná-la sônica. O escoamento no bocal é todo subsônico sendo a pressão de saída p_e igual à pressão externa p_b . A vazão de massa é calculada pela teoria de escoamento isentrópico subsônico, sendo menor do que a vazão crítica \dot{m}_{\max} , dada por (7.38).

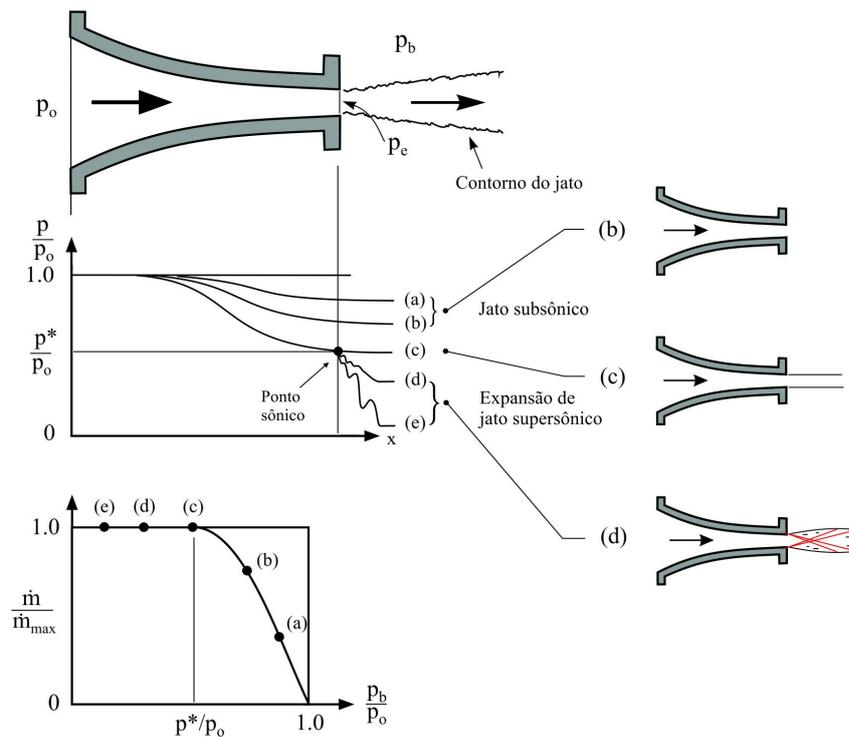


Figura 7.11 Operação de um bocal convergente.

Para a condição crítica (c), a pressão externa é exatamente igual à pressão crítica na garganta ($p_b = p^*$). A garganta torna-se sônica, o jato externo é sônico ($p_e = p_b$), e o fluxo de massa é igual ao valor máximo dado por (7.38). O escoamento é totalmente subsônico, podendo ser calculado pela teoria isentrópica baseada na razão de variação de área $A(x)/A^*$, Eq. (7.36).

Finalmente, se baixarmos para a condição (d), ou (e), (abaixo de p^*) o bocal não

pode mais responder, uma vez que se encontra na condição crítica; portanto, na vazão máxima de afogamento. A garganta permanece sônica e afogada com $p_c = p^*$, sendo a distribuição de pressão a mesma do estado (c), como mostrado na figura. O jato de saída expande-se para velocidade supersônica até que a pressão seja reduzida de p^* para p_b . Sendo supersônico, o jato não pode enviar qualquer informação a montante, capaz de influenciar a condição de afogamento.

Se a câmara plena de estagnação (reservatório a montante) for grande, ou for alimentada por um compressor, e se a câmara de descarga for igualmente grande, ou alimentada por uma bomba de vácuo, o bocal convergente terá um comportamento de regime permanente, ou próximo disso. Caso contrário, o bocal tenderá à condição de *blowdown*⁴, com a pressão p_o decrescendo e p_b crescendo, enquanto o estado do escoamento passa por uma mudança abrupta, digamos, do estado (e) para o estado (a). Cálculos de *blowdown* são difíceis, requerendo análises transientes da pressão de descarga de $p_o(t)$ para $p_b(t)$, por exemplo. Frequentemente, a grande preocupação com *blowdown* em vasos de pressão a altas pressões está relacionada à condição crítica existente na abertura da descarga.

Bocal Convergente-Divergente

Consideremos agora o bocal convergente-divergente mostrado na Fig. 7.12. Se a pressão externa p_b for baixa o suficiente, ocorrerá escoamento supersônico na parte divergente do bocal enquanto uma seqüência de ondas-de-choque será formada à jusante da saída do bocal. Consideremos então uma redução gradual da pressão externa p_b .

Para as curvas (a) e (b) a pressão externa não é suficiente para induzir escoamento sônico na garganta, mantendo-se o escoamento subsônico ao longo de todo o bocal. A distribuição de pressão pode ser calculada pela teoria isentrópica baseada na razão de variação de área $A(x)/A^*$, Eq. (7.36). A pressão de saída é mantida igual à pressão externa $p_c = p_b$ enquanto o jato de saída também mantém-se subsônico.

⁴ *Blowdown* é a expressão utilizada para designar a descarga de um fluido de um reservatório para um tanque a uma pressão bem inferior. A descarga de um gás em um tanque para a atmosfera por uma válvula aberta é um exemplo de *blowdown*. Outro exemplo é a descarga descontrolada de um fluido pela ruptura de um duto a partir de um reservatório pressurizado.

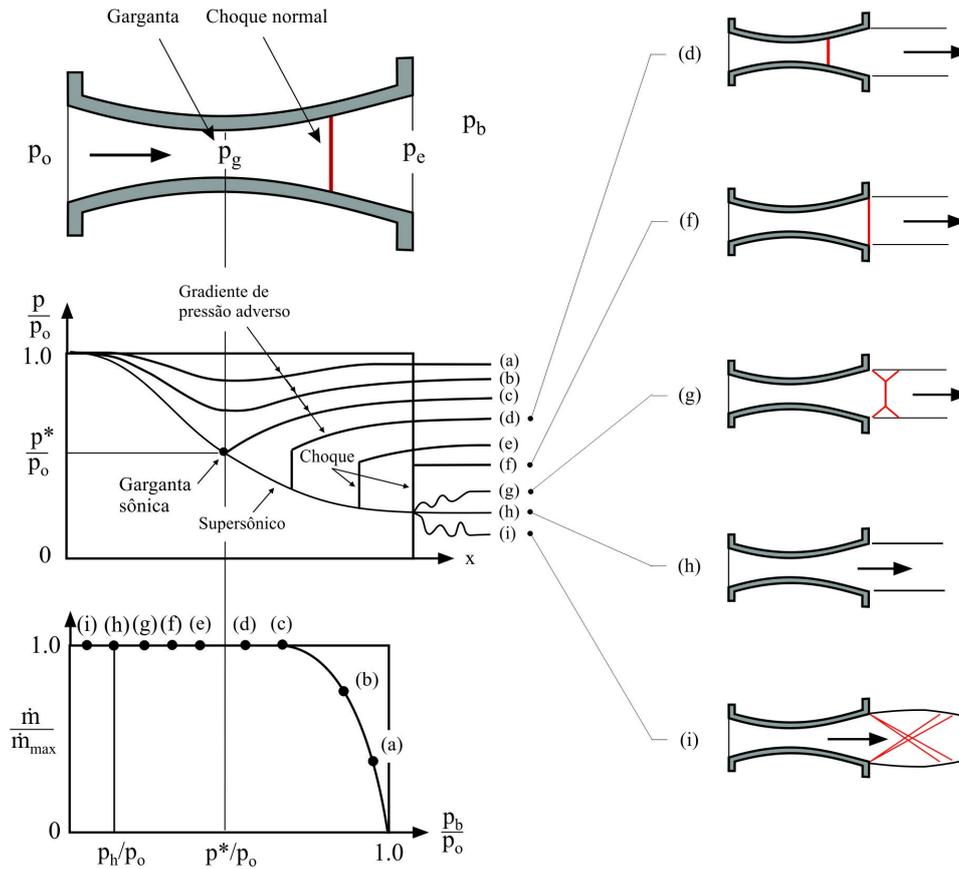


Figura 7.12 Operação de um bocal convergente-divergente

Para a curva (c) a razão de área A_c/A_g iguala-se exatamente com a razão crítica A_c/A^* para Mach de saída subsônico. A garganta torna-se sônica e a vazão de massa alcança o valor máximo. O bocal é subsônico, incluindo o jato de saída, e $p_e = p_b$.

Analisemos por um momento a curva (h). Aqui p_b é tal que p_b/p_0 corresponde a razão crítica da área A_c/A^* para um Ma_c supersônico, uma das duas raízes de (7.36). O escoamento na parte divergente é completamente supersônico, incluindo o jato na saída, e $p_e = p_b$. Esta condição é denominada de “razão de pressão de projeto”, sendo a pressão externa adequada para operação de túnel de vento supersônico, ou para a descarga eficiente de um motor de foguete a jato, por exemplo.

Consideremos agora a situação em que p_b fica entre as curvas (c) e (h), situação considerada impossível de acordo com os cálculos para escoamento isentrópico puro. As pressões correspondentes aos estados (d) até (f) se distribuem conforme esquematizado na figura; a garganta permanece afogada com velocidade sônica. Podemos igualar $p_e = p_b$ simplesmente colocando uma frente-de-choque no local adequado na região divergente

para provocar um escoamento *difusor-subsônico* de forma a satisfazer a pressão externa. O fluxo de massa permanece máximo. Na condição (f) o choque-normal acontece exatamente na saída do bocal. Na pressão (g) nenhum choque consegue satisfazer a condição do escoamento e o fluido comprime-se externamente numa série de choques oblíquos até satisfazer p_b .

Na condição de pressão (i) p_b é reduzido abaixo da pressão de projeto (h), mas o bocal está afogado, não podendo responder. O escoamento externo expande-se numa série complexa de movimentos supersônicos até satisfazer a pressão externa.

Observe que para p_b abaixo da pressão (c) ocorre escoamento supersônico na parte divergente do bocal e, mais uma vez, a garganta não recebe informação do comportamento do escoamento na saída. O escoamento permanece crítico, enquanto a garganta não tem a menor idéia da condição existente na saída.

Finalmente, deve-se observar que os conceitos aqui mostrados para o choque-normal são uma idealização. Na realidade, a jusante do choque o gradiente de pressão é adverso, ou seja, pressão crescente com a distância, o que normalmente provoca separação da camada-limite (separação do fluido na parede). O bloqueio da camada separada tende a interagir fortemente com a o escoamento central induzindo uma série de choques de compressão bidimensionais no lugar de um único choque unidimensional.

Vazão de Massa em Bocais

Combinando a relação isentrópica (7.10) com a equação de quantidade de movimento (7.31a) e a equação de gás perfeito resulta na expressão

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_2 \quad (7.40)$$

Esta equação pode ser também deduzida para escoamento adiabático ($dq_H = 0$) a partir da equação de energia – (2.4.11), sem trabalho de eixo e atrito viscoso – o que evita a restrição de escoamento isentrópico. Portanto, para escoamento adiabático a partir de um reservatório onde a condição é de estagnação ($T_1 = T_o$, $V_1 = 0$)

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_o - T) \quad (7.41)$$

combinando (7.10) e (7.41) a vazão de massa para escoamento subsônico no bocal é dada por

$$\dot{m} = \rho VA = A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_o \rho_o \left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \quad (7.42)$$

Esta equação é válida para qualquer seção onde a pressão local é p , sendo aplicável enquanto a velocidade permanecer subsônica. Ela pode ser aplicada na seção de área mínima também, para garganta com bocal convergente-divergente ou saída para bocal convergente; neste caso sabemos que a condição a seguir deve ser satisfeita, Eq. (7.37)

$$\frac{p_g}{p_o} \geq \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.43)$$

onde p_g é a pressão na garganta. Quando o sinal igual prevalecer (garganta sônica), (7.42) reduz-se à equação (7.38), ou (7.39)

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_o A^*}{\sqrt{RT_o}} \quad (7.44)$$

ou

$$\frac{\dot{m}_{\max} \sqrt{RT_o}}{p_o A^*} = \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (7.45)$$

exatamente a mesma equação obtida em (7.39)!

Exercícios

Exercício 7.1 Estimar a velocidade do som de um gás natural composto de 96% de metano e 4% de etano na temperatura de 25 °C. Comparar com a velocidade do ar na mesma temperatura.

Solução: Da tabela obtém-se os valores estimados para a mistura do gás, ou seja: $M_g = 16,604$ g/mol e $\gamma_g = 1,294$. Lembramos que a constante universal dos gases é $R^* = 8,3144$ kJ/kmol-K.

Componente	Composição	M	γ	PM	$\Pi \gamma$
	molar	kg/kmol	--	g/mol	--
Metano	0,96	16,043	1,299	15,401	1,247
Etano	0,04	30,07	1,186	1,203	0,047
Mistura	1	--	--	16,604	1,294

Portanto, $R_g = 8314,4/16,604 = 500,75$ J/kg-K. Logo, a velocidade do som do gás a 25 °C é, Eq. (7.18),

$$c_{gas} = \sqrt{\gamma_g R_g T} = \sqrt{1,294 \times 500,8 \times 298,2} = 440 \text{ m/s}$$

A velocidade do som no ar, à mesma temperatura, será

$$c_{ar} = \sqrt{\gamma_{ar} R_{ar} T} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 298,2} = 346 \text{ m/s}$$

Ou seja, a velocidade sônica do gás natural é, neste caso, cerca de 27% superior à do ar.

Exercício 7.2 Gás natural com a composição do exercício 7.1 escoar por um duto tal que a condição na entrada é (pressões em valores absolutos): $p_1 = 17,2$ bar e $\rho_1 = 7,7$ kg/m³, enquanto na saída a condição é: $p_2 = 2,07$ bar e $T_2 = 130$ °C. Estimar os seguintes parâmetros do escoamento: a) temperatura na entrada; b) massa específica na saída; c) variação da entalpia e da entropia.

Solução: Dados iniciais do problema: $R_g = 500,75$ J/kg-K. Da Eq. (7.3) $c_p = \gamma R_g / (\gamma - 1) = 2204$ J/kg-K

a) Temperatura na entrada:

$$T_1 = \frac{p_1}{R \rho_1} = \frac{17,2 \times 10^5}{500,75 \times 7,7} = 446 \text{ K} = (173 \text{ °C})$$

b) Massa específica na saída:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{2,07 \times 10^5}{500,75 \times 403,2} = 1,025 \text{ kg/m}^3$$

c) Variações de entalpia e entropia. Das Eqs. (7.4) e (7.9)

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 2204 \times (403,2 - 446) = -94331 \text{ J/kg}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = 838 \text{ J/kg-K}$$

Portanto, a entalpia do gás decresce na medida que se move para a saída do duto. Observe que a unidade J/kg é equivalente a $(\text{m/s})^2$; i.e., energia cinética por unidade de massa.

Como observado, a entropia do fluido aumentou. Se não houver troca de calor (duto isolado termicamente, por exemplo), da desigualdade de Clausius, Eq. (2.4.18), $Tds - dq \geq 0$, que, para $dq = 0$, requer $Tds \geq 0$, indica a existência de um processo irreversível devido ao atrito viscoso.

Exercício 7.3 Ar escoia adiabaticamente (sem troca de calor com o exterior) por um duto. Num ponto arbitrário, denominado ponto-1, a seguinte condição é conhecida (pressões em valores absolutos): $V_1 = 245 \text{ m/s}$, $T_1 = 22 \text{ °C}$, $p_1 = 1,72 \text{ bara}$. Num ponto-2, a jusante, a seguinte condição prevalece: $V_2 = 293 \text{ m/s}$, $p_2 = 1,37 \text{ bara}$. Estimar: a) as seguintes propriedades de estagnação: T_o , p_o e ρ_o , assim como o número de Mach Ma ; b) a velocidade crítica V^* ; c) o valor da pressão de estagnação no ponto-2 p_{o2} .

Solução: Dados iniciais do problema (ar): $R_g = 287 \text{ J/kg-K}$, $\gamma = 1,40$; $c_p = \gamma R_g / (\gamma - 1) = 1005 \text{ J/kg-K}$.

a) Condição de estagnação. Da Eq. (7.21), a equação de energia é escrita como

$$h + \frac{V^2}{2} = h_o \quad \text{ou} \quad c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_o$$

Resolvendo para T_o no ponto-1

$$T_{o1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = (273,2 + 22) + \frac{245^2}{2 \times 1005} = 325 \text{ K} \quad (= 51,9 \text{ °C}) \quad (1)$$

Calculamos o número de Mach a partir da Eq. (7.22)

$$Ma_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{T_{o1}}{T_1} - 1 \right) = \frac{2}{1,4 - 1} \left(\frac{325}{295,2} - 1 \right) = 0,505 \quad \therefore \quad Ma_1 = 0,71$$

Alternativamente, podemos calcular Ma a partir da velocidade sônica, i.e. $c_1 = (\gamma RT_1)^{1/2} = 344,4 \text{ m/s}$. O número de Mach no ponto-1 é, então, $Ma_1 = V_1 / c_1 = 245 / 344,4 = 0,71$.

A pressão e massa específica de estagnação são obtidas da Eq. (7.24). Primeiro podemos calcular a massa específica em 1 (será necessária para o cálculo da massa específica de estagnação). Da equação

dos gases perfeitos

$$\rho_1 = \frac{P_1}{R T_1} = \frac{1,72 \times 10^5}{287 \times 295,2} = 2,03 \text{ kg/m}^3$$

Então, para a pressão e massa específica de estagnação

$$p_{o1} = p_1 (1 + 0,2 Ma_1^2)^{3,5} = 1,72 \times 1,34 = 2,407 \text{ bar} \quad (2)$$

$$\rho_{o1} = \rho_1 (1 + 0,2 Ma_1^2)^{2,5} = 2,03 \times 1,2714 = 2,58 \text{ kg/m}^3$$

Mais uma vez observamos que a massa específica de estagnação poderia ter sido calculada de forma mais direta a partir da equação dos gases (para o estado de estagnação)

$$\rho_o = \frac{P_o}{R T_o} = \frac{2,407 \times 10^5}{287 \times 325} = 2,58 \text{ kg/m}^3$$

b) Velocidade crítica. É igual à velocidade sônica na temperatura crítica, obtida diretamente de (7.25)

$$V^* = c^* = (\gamma R T^*)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} R T_o \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 1,4}{1,4+1} \times 287 \times 325 \right)^{1/2} = 330 \text{ m/s}$$

c) Pressão de estagnação no ponto-2. Para calcular a pressão em 2 deve-se calcular o número de Mach primeiro (para utilizar a Eq.(2) acima). Portanto, temos que avaliar a temperatura em 2. Isso pode ser feito a partir da Eq.(1) uma vez que, sendo o escoamento adiabático, $T_{o2} = T_{o1} = 325 \text{ K}$. Logo

$$T_2 = T_{o2} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 325 - \frac{293^2}{2 \times 1005} = 282,2 \text{ K} \quad (= 9 \text{ }^\circ\text{C})$$

Com este valor calcula-se o número de Mach em 2. Primeiro, a velocidade do som $c_2 = (\gamma R T_2)^{1/2} = 336,7 \text{ m/s}$. Assim $Ma_2 = 293/336,7 = 0,87$. Logo, a pressão de estagnação é

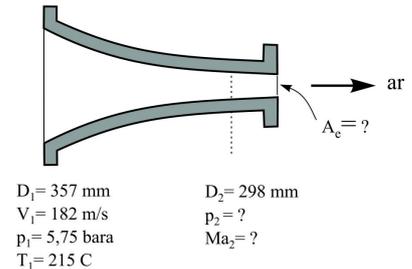
$$p_{o2} = p_2 (1 + 0,2 Ma_2^2)^{3,5} = 1,37 \times 1,638 = 2,244 \text{ bar}$$

Um valor 7% inferior à pressão de estagnação em 1.

Exercício 7.4 Ar escoá isentropicamente por um bocal convergente. Numa seção-1 a condição (pressões em valores absolutos) é: área $A_1 = 0,10 \text{ m}^2$ ($D_1 = 357 \text{ mm}$), $V_1 = 182 \text{ m/s}$, $p_1 = 5,75 \text{ bara}$, $T_1 = 215 \text{ °C}$. Noutra seção-2, a jusante, a área é $A_2 = 0,07 \text{ m}^2$ ($D_2 = 298 \text{ mm}$). Calcular: a) a condição de estagnação; b) a área crítica, A^* ; c) a pressão e o número de Mach no ponto-2 para escoamento subsônico.

Solução: a) Condição de estagnação. Com V_1 e T_1 especificados, a equação de energia (7.23) fornece

$$T_o = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = (273,2 + 215) + \frac{182^2}{2 \times 1005} = 504,7 \text{ K} \quad (= 231,5 \text{ °C})$$



A velocidade do som na entrada é $c_1 = (\gamma RT_1)^{1/2} = 443 \text{ m/s}$. Logo, $Ma_1 = 182/443 = 0,41$. Portanto, a pressão de estagnação é

$$p_{o1} = p_1 (1 + 0,2 Ma_1^2)^{3,5} = 5,75 \times 1,1226 = 6,456 \text{ bar}$$

b) Área crítica. A área crítica é aquela onde o número de Mach é, ou seria, unitário (exista esta situação ou não no escoamento), §7.4, Eq. (7.36) e Fig. 7.10. Da Eq. (7.36) aplicada na seção-1

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{Ma_1} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)Ma_1^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{(1 + 0,2 \times 0,41^2)^3}{1,728 \times 0,41} = 1,558$$

Uma vez especificada a área-1, a área crítica pode ser determinada

$$A^* = \frac{A_1}{1,558} = \frac{0,10}{1,558} = 0,0642 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad (D^* = 286 \text{ mm})$$

Se o escoamento chegar eventualmente a supersônico no duto, esta área mínima (garganta) deve existir. Se o escoamento for subsônico ela pode ser somente um referencial para os cálculos; sendo, neste caso, $A_g > A^*$, nada impedindo, por outro lado, que exista também.

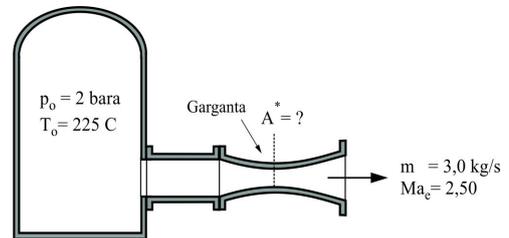
c) Condição no ponto-2. Uma vez que $A_2 = 0,07 \text{ m}^2$, calculamos $A_2/A^* = 1,090$. Para escoamento subsônico temos que encontrar o número de Mach a partir da solução da Eq. (7.36). Isto pode ser feito por um processo iterativo, ou por um algoritmo numérico eficiente para encontrar a raiz da equação. Por tentativa e erro encontramos o valor $Ma_2 = 0,705$. Portanto, a pressão em 2 é (admitindo escoamento isentrópico entre 1 e 2; ou seja, $p_{o2} = p_{o1}$)

$$p_2 = \frac{p_{o2}}{(1 + 0,2 Ma_2^2)^{3,5}} = \frac{6,456 \times 10^5}{(1 + 0,2 \times 0,705^2)^{3,5}} = 4,63 \text{ bara} \quad (= 3,62 \text{ bar})$$

Exercício 7.5 Um tanque contém ar comprimido na seguinte condição: $p_o = 2$ bara, $T_o = 225$ °C. Deseja-se expandir o ar por um bocal convergente-divergente com número de Mach na saída (do bocal) igual a 2,5. Deseja-se que o fluxo de massa para esta condição seja de 3 kg/s. Calcular: a) a área da garganta; b) a seguinte condição na saída do bocal: pressão, temperatura, velocidade e área. Admitir $\gamma = c_p/c_v = 1,40$.

Solução: a) Área da garganta. A garganta deve ser sônica, uma vez que o escoamento na saída é supersônico. Portanto, para condição de afogamento a Eq. (7.38) fornece o fluxo de massa máximo no bocal

$$\dot{m}_{\max} = \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_o A^*}{\sqrt{RT_o}} = 0,6847 \frac{p_o A^*}{\sqrt{RT_o}}$$



Resolvendo para a área crítica A^*

$$A^* = \frac{\dot{m}_{\max} \sqrt{RT_o}}{0,6847 p_o} = \frac{3,0 \sqrt{287 \times 498,2}}{0,6847 \times 2 \times 10^5} = 0,00828 \text{ m}^2 \quad \therefore (D^* = 102,67 \text{ mm})$$

b) Condição na saída do bocal. Com o número de Mach especificado na saída a condição isentrópica para pressão e temperatura possibilita calcular esses parâmetros (lembrar que a condição no interior do tanque é de estagnação uma vez que a velocidade ali pode ser considerada nula)

$$p_e = \frac{p_o}{(1 + 0,2 Ma_e^2)^{3,5}} = \frac{2 \times 10^5}{(1 + 0,2 \times 2,5^2)^{3,5}} = 0,117 \text{ bar}$$

$$T_e = \frac{T_o}{1 + 0,2 Ma_e^2} = \frac{498,2}{1 + 0,2 \times 2,5^2} = 221,5 \text{ K } (= -51,7 \text{ °C})$$

O cálculo da velocidade de saída segue da definição do número de Mach na saída

$$V_e = Ma_e \sqrt{\gamma RT_e} = 2,5 \sqrt{1,4 \times 287 \times 221,5} = 746 \text{ m/s}$$

O cálculo da área de saída é feito a partir da relação para a área crítica, Eq. (7.36),

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{Ma_e} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)Ma_e^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{(1 + 0,2 \times 2,5^2)^3}{1,728 \times 2,5} = 2,637$$

Assim, uma vez que a área da garganta é conhecida, a área da saída é

$$A_e = 2,637 A^* = 2,637 \times 0,00828 = 0,0218 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad (D_e = 166,7 \text{ mm})$$

diâmetro de 166,7 mm. Um comentário final sobre este problema: o cálculo da área da garganta não depende do número de Mach na saída. No caso presente a saída foi especificada supersônica, portanto, a garganta é sônica e afogada.

Exercício 7.6 Um tanque contém ar comprimido na seguinte condição: $p_o = 1 \text{ MPa}$, $T_o = 225 \text{ °C}$. Deseja-se expandir o gás por um bocal convergente-divergente, Fig. 7.12, que possui uma garganta com área de $0,002 \text{ m}^2$ ($D_g = 50,45 \text{ mm}$) e área de saída de $0,008 \text{ m}^2$ ($D_e = 100,9 \text{ mm}$). Calcular: a) a pressão de projeto (curva H na Fig. 7.12) e o fluxo de massa correspondente; b) a pressão de saída p_e e a vazão de massa correspondente para: b.1) $p_b = 300 \text{ kPa}$; b.2) $p_b = 900 \text{ kPa}$. Obs. Para compreender melhor o problema, ler de novo o texto sobre bocal convergente-divergente, §7.5; após acompanhe a solução a seguir.

Solução: a) Pressão de projeto e vazão de massa. A condição de projeto, conforme definido em §7.5, corresponde ao escoamento isentrópico supersônico para a razão de área $A_e/A_g = 0,008/0,002 = 4,0$. O número de Mach na saída (supersônico) é obtido pela solução da Eq. (7.36), exatamente como no exemplo 7.4. Após algumas tentativas encontramos $Ma_{ep} \approx 2,95$ (número de Mach de saída para condição de pressão de projeto). Como o escoamento é admitido isentrópico, a relação para a pressão, Eq. (7.24), fornece a pressão de saída de projeto, assim como a temperatura de saída

$$p_e = \frac{p_o}{(1 + 0,2 Ma_e^2)^{3,5}} = \frac{10 \times 10^5}{(1 + 0,2 \times 2,95^2)^{3,5}} = 0,293 \text{ bar}$$

$$T_e = \frac{T_o}{1 + 0,2 Ma_e^2} = \frac{498,2}{1 + 0,2 \times 2,95^2} = 181,8 \text{ K} \quad (= -91,4 \text{ °C})$$

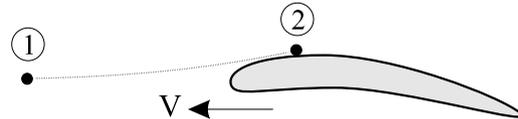
Uma vez que a garganta encontra-se na condição sônica (sem choques no bocal), a vazão de massa é obtida a partir da condição de afogamento, Eq. (7.38),

$$\dot{m}_{\max} = \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_o A^*}{\sqrt{RT_o}} = 0,6847 \frac{p_o A^*}{\sqrt{RT_o}} = 0,6847 \frac{10^6 \times 0,002}{\sqrt{287 \times 498,2}} = 3,62 \text{ kg/s}$$

b.1) Pressão de saída e vazão de massa para $p_b = 300 \text{ kPa}$. A razão crítica na garganta $p^*/p_o = 0,5283$, Eq. (7.25), corresponde a $p^* = 528,3 \text{ kPa}$. Portanto, com $p_b = 300 \text{ kPa}$ estamos bem abaixo da curva (c) na Fig. 7.12 ($300 \text{ kPa} < 528,3 \text{ kPa}$), podendo estar, inclusive, abaixo da condição (f), com um choque normal ocorrendo na saída, como na condição (g), onde um choque oblíquo forma-se na saída. Se a condição for esta, então a pressão de saída é igual a pressão de projeto calculada acima, i.e., $p_e = p_{ep} = 0,293 \text{ bar}$ uma

vez que não ocorreu ainda um choque na saída. Para sabermos se choque ocorre teríamos que fazer uso das equações de conservação através de choques normais, um tópico não coberto neste curso. Interrompemos os cálculos aqui.

b.2) Pressão de saída e vazão de massa para $p_b = 900$ kPa. Neste caso estamos próximos da curva (c). Calculemos Ma_e e p_e para esta situação. De novo, a relação crítica para as áreas é $A_e/A_g = 4,0$. O número de Mach de saída (subsônico) é obtido de (7.36), exatamente como no caso supersônico. Após algumas tentativas encontramos $Ma_e \approx 0,147$. Como o escoamento é isentrópico a relação para a pressão e temperatura na saída são dadas pelas por (7.24) e (7.22), respectivamente



$$p_e = \frac{p_o}{(1 + 0,2 Ma_e^2)^{3,5}} = \frac{10 \times 10^5}{(1 + 0,2 \times 0,147^2)^{3,5}} = 9,85 \text{ bar} \quad (1)$$

$$T_e = \frac{T_o}{1 + 0,2 Ma_e^2} = \frac{498,2}{1 + 0,2 \times 0,147^2} = 496 \text{ K } (=222,8 \text{ } ^\circ\text{C})$$

Como a pressão externa é de 9,0 bar (900 kPa) estamos numa situação correspondendo a condição (d) na Fig. 7.12. Portanto, nesta situação devemos esperar um choque normal ocorrendo logo a jusante da garganta, encontrando-se a mesma afogada. Logo

$$p_e = p_b = 9,0 \text{ bar} \quad \dot{m} = \dot{m}_{\max} = 3,61 \text{ kg/s}$$

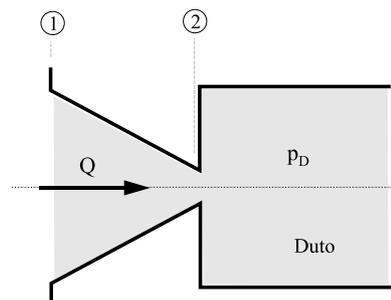
Destaque-se que, para esta alta relação de área de saída para a garganta a pressão na saída teria que ser superior a 9,85 bar, Eq. (1), para garantir escoamento subsônico na garganta e vazão de massa inferior ao valor máximo admissível.

Exercício 7.7 Um avião voa a uma altitude de 3000m onde a temperatura é de -7 °C e a pressão atmosférica 71,1 kPa (ponto-1). Num ponto-2 na asa a pressão medida é 47 kPa, e o número de Mach igual a 0,95. Admitindo escoamento isentrópico pede-se estimar o valor da velocidade do avião.

Solução:

Consideremos o avião estacionário e o ar movendo-se com a velocidade deste. Para escoamento isentrópico, de (7.10)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$



Logo

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = (273,2-7) \left(\frac{47 \times 10^3}{71,1 \times 10^3} \right)^{0,286} = 236,5 \text{ K} = -36,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

A velocidade local pode ser obtida a partir do número de Mach e da velocidade sônica

$$V_2 = Ma_2 c_2 = Ma_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 0,95 \sqrt{1,4 \times 287 \times 236,5} = 293 \text{ m/s}$$

Da equação de energia entre 1 e 2

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Portanto, a velocidade em 1 (velocidade do avião)

$$V_1 = \sqrt{2 \left(h_2 - h_1 + \frac{V_2^2}{2} \right)} = \sqrt{2 c_p (T_2 - T_1) + V_2^2} = \sqrt{2 \times 1005 \times (236,5 - 266,2) + 293^2} = 162 \text{ m/s}$$

Logo, o avião desloca-se à velocidade de 162 m/s, ou 583 km/h.

Exercício 7.8. Ar escoar por um bocal convergente na direção de um duto conforme mostrado na figura, sob a seguinte condição (pressões absolutas): 1) Entrada: $V_1 = 243 \text{ m/s}$, $T_1 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_1 = 69 \text{ kPa}$.; 2) Duto: $p_D = 37,2 \text{ kPa}$. Determinar a condição na garganta (seção-2) para: pressão, temperatura, velocidade e número de Mach.

Solução: Admitamos escoamento isentrópico.

Calculemos inicialmente a condição de estagnação para a pressão e temperatura. Então

$$T_o = T_1 + \frac{V_1^2}{2 c_p}$$

logo

$$T_o = (273,2 + 60) + \frac{243^2}{2 \times 1005} = 362,6 \text{ K} = 89,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

De (7.10), para a pressão de estagnação

$$\frac{p_o}{p_1} = \left(\frac{T_o}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \therefore \quad p_o = 92,8 \text{ kPa}$$

A razão crítica para as pressões, (7.25), é obtida

$$\frac{p^*}{p_o} = \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} = 0,528$$

Assim, a pressão crítica é $p^* = 0,528 \times 92,8 = 49 \text{ kPa}$. Como a pressão no duto ($p_D = 37,2 \text{ kPa}$) é inferior a este valor o bocal estará afogado, com $Ma = 1$ na garganta. Logo, na garganta (seção-2)

$$p_2 = 0,528 \times p_o = 0,528 \times 92,8 = 49 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 333,2 \times (49/69)^{0,286} = 302,1 \text{ K} = 29 \text{ }^\circ\text{C}$$

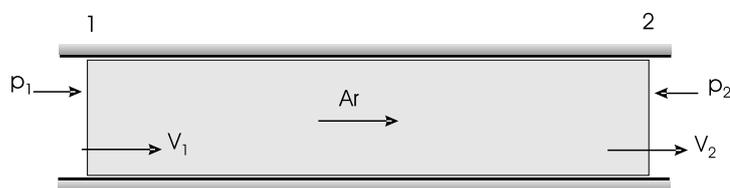
$$Ma_2 = 1 \text{ (afogado)}$$

$$V_2 = c_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = 348 \text{ m/s}$$

Exercício 7.9 Ar escoa num duto horizontal com diâmetro constante de 150 mm, conforme mostrado na figura. A condição na entrada é: $p_1 = 690 \text{ kPa}$ (abs), $T_1 = 38 \text{ }^\circ\text{C}$, $V_1 = 155 \text{ m/s}$ e o escoamento está afogado (*choked*), i.e. velocidade na saída é sônica (veremos no Cap. 8). Determinar a força resultante atuando sobre o duto. Sugestão: combinar a equação de energia: $h_1 + V_1^2/2 = h_2 + V_2^2/2$, a velocidade sônica na saída (ponto 2) e a equação de continuidade entre os dois extremos.

Solução:

O volume de controle para a equação de quantidade de movimento está indicado na figura. Para regime permanente



$$\Sigma F = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

ou

$$(p_1 - p_2)A + F_x = \rho_1 A V_1 (V_2 - V_1) \quad (1)$$

Na saída o número de Mach é unitário, então

$$V_2 = c_2 = \sqrt{\gamma RT_2} \quad \therefore \quad T_2 = V_2^2/\gamma R \quad (2)$$

Da equação de energia

$$V_2^2 = V_1^2 + 2c_p(T_1 - T_2) = V_1^2 + 2c_p(T_1 - V_1^2/\gamma R)$$

resolvendo para V_2

$$V_2 = \sqrt{\frac{V_1^2 + 2c_p T_1}{1 + 2c_p/\gamma R}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + 2c_p T_1}{1 + 2/(\gamma - 1)}}$$

Com V_1 e T_1 calcula-se $V_2 = 329$ m/s. Com este valor a Eq. (2) fornece a temperatura em 2; i.e. $T_2 = 269,4$ K (= - 3,8 °C). Finalmente, da equação de continuidade,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \therefore \quad \frac{p_1}{T_1} V_1 = \frac{p_2}{T_2} V_2 \quad \therefore \quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{V_2} = 690 \frac{269,4}{311,2} \frac{155}{329} = 281,4 \text{ kPa}$$

Levando os dados em (1) obtém-se $\rho_1 = 7,7305$ kg/m³ e $F_x = - 3536$ N. Esta é a força atuando sobre o fluido; sobre o duto atuará uma força igual e de sinal contrário, na direção positiva; i.e., na direção do fluxo. Logo

$$F_{duto} = 3536 \text{ N} = 360,6 \text{ kg}_f$$