

# 3 Escoamento Viscoso em Dutos

Problemas envolvendo o escoamento de fluido em dutos requerem o cálculo de vazões, perda de pressão e conversão de energia. Na sua solução são utilizados os princípios definidos no capítulo anterior relativos à conservação de massa, balanço de forças e quantidade de movimento e conservação de energia. A resistência ao escoamento viscoso ocorre não somente nas longas seções retas, mas também em elementos construtivos como curvas, conexões e válvulas, que dissipam energia ao produzirem turbulência local em larga escala.

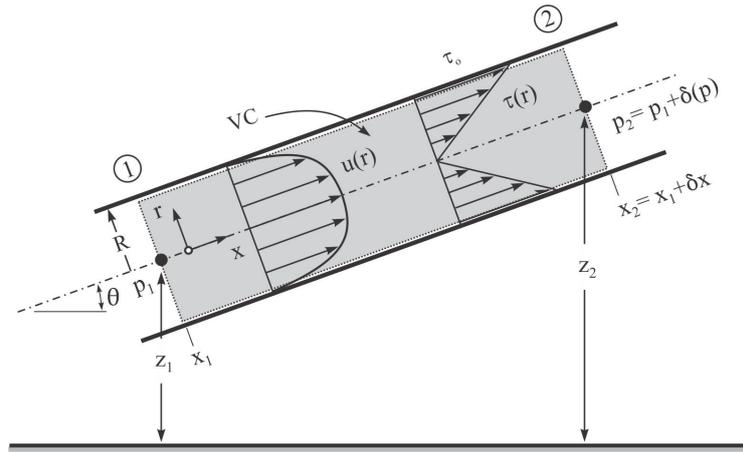
Escoamentos compressíveis requerem a aplicação de técnicas especiais de dinâmica e termodinâmica dos fluidos. Casos particulares envolvendo aplicações do escoamento de gás natural serão considerados após o estudo de escoamento de líquidos, considerados praticamente incompressíveis.

Em geral a análise de escoamento em dutos restringe-se à situações em que este está completamente cheio. Casos em que o duto encontra-se parcialmente cheio ocorrem em algumas situações particulares como em esgotos sanitários ou no escoamento trifásico de líquidos (óleo e água) e gás na produção de petróleo. Por requererem análises especializadas nossas atenções neste livro estão voltadas exclusivamente para escoamentos monofásicos em linhas completamente cheias.

## 3.1 Força de Resistência e Dissipação de Energia

Embora a equação de energia (3.1.1) seja essencial para a análise de engenharia ela não contém qualquer informação sobre as forças de resistência que causam dissipação de energia no fluido. Desprezando os efeitos devidos à troca de energia térmica e os trabalhos de eixo e das forças viscosas  $h_q$ ,  $h_s$  e  $h_v$ , respectivamente,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad (3.1.1)$$



**Figura 3.1.1** Volume de controle num duto de seção circular

Essas forças podem ser isoladas e relacionadas com a equação de energia por uma análise unidimensional do escoamento (compressível ou não), conforme mostrado na Fig. 3.1.1. A tensão cisalhante  $\tau_o$  constitui a força resistiva básica que deve ser investigada, sendo responsável pela resistência na periferia do duto que se opõe ao movimento do fluido. Aplicando o teorema de quantidade de movimento para o volume de controle indicado

$$(pA)_x - (pA)_{x+dx} - \tau_o P dx - g\rho A dx \frac{dz}{dx} = (\rho A V^2)_{x+dx} - (\rho A V^2)_x \quad (3.1.2)$$

Expandindo e tomando o limite do elemento para zero

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g dz = -\frac{4\tau_o dx}{\rho D_h} \quad (3.1.3)$$

onde  $D_h = 4A/P$  é definido como o *diâmetro hidráulico* ( $P$  é o perímetro “molhado”).

Ignorando os termos devidos ao trabalho de eixo (máquinas) e de forças viscosas, a equação de energia (2.4.14) (originalmente na forma da Eq. (2.4.9)) tem a forma

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g dz = dq - d\hat{u} \quad (3.1.4)$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g dz = dq - d\hat{u} - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.1.5)$$

Comparando (3.1.3) com (3.1.5)

$$\frac{4\tau_o dx}{\rho D_h} = d\hat{u} - dq + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.1.6)$$

que fornece uma relação básica entre a tensão cisalhante na parede do duto com alguns termos da equação de energia (energia interna, fluxo de calor e trabalho devido à compressão). Observe que para escoamento compressível a integração desta equação só pode ser feita conhecendo-se o processo termodinâmico, afetando a troca de calor  $q$ . Observemos ainda que, para um processo reversível (sem atrito, portanto), da relação termodinâmica  $d\hat{u} + pdv - dq = Tds - dq = 0$ , (cf. Eqs. 2.4.16 e 2.4.20), exatamente o mesmo resultado obtido na Eq. (3.1.6) com  $\tau_o = 0$ .

Para um fluido incompressível,  $d(1/\rho) = 0$ , da integral de (3.1.6)

$$\frac{4\tau_o \Delta l}{\rho D_h} = \hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q \quad (3.1.7)$$

Todavia, o lado direito desta equação já foi definido, Eqs. (2.4.16) a (2.4.24), como a queda na linha de energia devida ao atrito; i.e.  $\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q = \int(d\hat{u} - dq) = \int(Tds - dq) = \int dw_f = \int g dh_f = g h_f$ . Ou seja, a perda de energia no duto pode ser expressa em termos da tensão cisalhante na parede a partir da Eq. (3.1.7)

$$h_f = \frac{4\tau_o \Delta l}{\rho g D_h} \quad (3.1.8)$$

Destaque-se que o mesmo resultado seria obtido para qualquer tubo de corrente no interior do duto (sob a hipótese de unidimensionalidade do escoamento). Portanto, para uma raio genérico  $r$  a expressão da tensão cisalhante num duto circular pode ser obtida de (3.1.8) acima como

$$\tau(r) = \left[ \frac{\rho g h_f}{2 \Delta l} \right] r = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z) \right] \frac{r}{2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{r}{2} \quad (3.1.9)$$

o que mostra que num escoamento desenvolvido ( $V_1=V_2$ ) a tensão cisalhante no fluido varia linearmente com a distância radial a partir da linha de centro do duto. Note que nesta equação foi definido a variável  $\phi$

$$\phi = p + \rho g z \quad (3.1.10)$$

Até agora não foi necessário admitir nenhuma hipótese quanto à natureza do escoamento e do fluido, seja laminar ou turbulento, newtoniano ou não-newtoniano. Portanto, a expressão (3.1.9) é válida para os dois regimes de escoamento, desde que satisfeitas as outras hipóteses mencionadas (escoamento desenvolvido, unidimensional etc.)

Se correlacionarmos a tensão cisalhante na parede  $\tau_o$  com as condições do escoamento teremos resolvido o problema de perda de carga no duto. Por outro lado, é razoável admitir que a tensão na parede seja função de algumas propriedades como massa específica, velocidade média e viscosidade do fluido, assim como de termos associados à geometria, como diâmetro e rugosidade,

$$\tau_o = F(\rho, V, \mu, D, \epsilon) \quad (3.1.11)$$

onde  $\epsilon$  é a altura média da rugosidade na parede do tubo. Todavia, a análise dimensional nos diz que essas variáveis podem ser combinadas numa relação funcional do tipo

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho V^2} = F(Re, \frac{\epsilon}{D}) \quad (3.1.12)$$

onde  $Re = \rho V D / \mu$  é o número de Reynolds e  $f$  é um parâmetro adimensional doravante denominado de *fator de atrito de Darcy*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> A equação (3.1.12) é muitas vezes escrita como

$$f_F = \frac{2\tau_o}{\rho V^2}$$

denominada equação de Fanning. Obviamente, o fator de Fanning é 1/4 do fator de Darcy. As duas formas podem ser utilizadas, sendo necessário somente identificá-las para determinar corretamente o valor numérico do fator a ser utilizado no cálculo da perda de carga.

Combinando as Eqs. (3.1.9) e (3.1.12) o coeficiente de atrito pode ser obtido em função do gradiente de pressão  $d\phi/dx$  na forma

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho V^2} = \frac{2D}{\rho V^2} \left(-\frac{d\phi}{dx}\right) \quad \therefore \quad -\frac{d\phi}{dx} = f \frac{1}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad (3.1.13)$$

de (3.1.8) e (3.1.12) obtém-se a consagrada *equação de Darcy-Weisbach*

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3.1.14)$$

válida para escoamentos laminar ou turbulento, para dutos de qualquer seção. Resta somente encontrar a forma da função proposta para  $f$  em (3.1.12) para as condições de escoamento.

Da Eq.(3.1.12) podemos definir uma velocidade característica para o escoamento viscoso, denominada *velocidade de atrito*  $u^*$  tal que

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (3.1.15)$$

Embora o significado físico da velocidade de atrito não seja revelado por esta relação algébrica – uma vez ser simplesmente uma velocidade envolvendo tensão cisalhante na parede e massa específica do fluido –, veremos a seguir que ela tem extrema importância prática na análise do regime de escoamento nas vizinhanças da parede do duto.

### 3.2 Regimes de Escoamento

O escoamento viscoso pode ser classificado como laminar ou turbulento. No regime laminar o fluido esco sem se misturar de forma significativa com as partículas vizinhas. Já no escoamento turbulento o movimento do fluido varia de forma acentuada fazendo com que variáveis como a velocidade e a pressão apresentem variações aleatórias no espaço e no tempo. Experimentos mostram que a definição do regime de escoamento depende do número de Reynolds. Se este for relativamente pequeno o regime é laminar, se elevado, é turbulento. Os dois estados são caracterizados de forma mais apropriada definido um número de *Reynolds crítico*  $Re_c$  de forma que o escoamento é laminar se  $Re < Re_c$  e turbulento se  $Re > Re_c$ . Para escoamento interno em dutos circulares  $Re_c \approx 2300$ .

A referência básica deste importante parágrafo §3.2 é o livro de H. Schlichting<sup>2</sup>.

### 3.2.1 Escoamento Laminar em Duto Circular - Hagen-Poiseuille

Analisemos o escoamento num duto reto com seção transversal circular conforme mostrado na Fig. 3.2.1. Seja  $r$  a coordenada radial medida a partir da linha de centro. Os componentes nas direções radial e tangencial são nulos, enquanto o componente na direção paralela ao

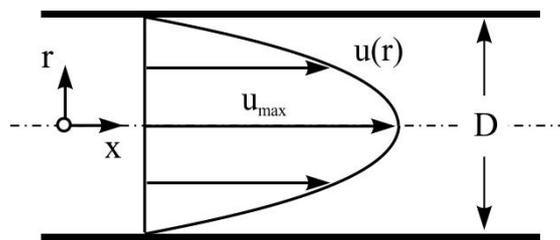


Figura 3.2.1 Escoamento laminar num duto circular.

eixo depende somente de  $r$  e a pressão é admitida constante na seção transversal. Dos três componentes da equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, somente a equação na direção- $x$  é não-nula, ficando na forma simplificada

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2.1)$$

Para a condição de contorno  $u = 0$  em  $r = R$  a solução é

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (R^2 - r^2) \quad (3.2.2)$$

onde  $-\partial p/\partial x$  é o gradiente de pressão, por enquanto considerado conhecido. Observe que o perfil de velocidade é um parabolóide. A velocidade média  $V$  e a vazão  $Q$  são então

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.2.3)$$

e

---

<sup>2</sup> Schlichting, H., Gersten, K., *Boundary Layer Theory*, 8ª Ed., Springer-Verlag, USA, 2003.

$$Q = \pi R^2 V = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (3.2.4)$$

No escoamento laminar descrito por esta solução somente existe enquanto o número de Reynolds  $Re = VD\rho/\mu$  estiver abaixo do valor crítico. De acordo com experimentos

$$\left(\frac{VD}{\nu}\right)_{crit} = Re_{crit} \approx 2300 \quad (3.2.5)$$

Para  $Re > Re_c$  o padrão do escoamento é totalmente diferente, tornando-se turbulento.

Introduzindo a expressão para  $\partial p/\partial x$  da Eq. (3.2.3) na Eq. (3.1.13)

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{com} \quad Re = \frac{\rho VD}{\mu} \quad (3.2.6)$$

onde  $Re$  significa o número de Reynolds calculado para o diâmetro (interno) e a velocidade média do escoamento. Para escoamento laminar o fator de atrito não depende da rugosidade da parede.

### 3.2.2 Escoamento Laminar entre Placas Paralelas - Hagen-Poiseuille

Consideremos agora o escoamento entre duas placas paralelas separadas por uma distância  $d$ , conforme ilustrado na Fig. 3.2.2. Seja  $y$  a coordenada normal, com origem na placa inferior, e  $x$  a coordenada axial. Os componentes das forças e velocidades nas direções  $y$  e  $z$  (normal ao plano da figura) são nulos; o componente da velocidade na direção paralela ao eixo depende somente de  $y$ , e a pressão é admitida constante na seção transversal. Dos três componentes da equação de Navier-Stokes somente a equação na direção- $x$  é não-nula assumindo a forma

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2.7)$$

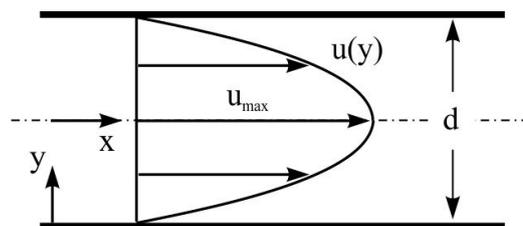


Figura 3.2.2 Escoamento laminar entre placas paralelas.

Para as duas condições de contorno  $u=0$  em  $y=0$  e  $u=0$  em  $y=d$

$$u(y) = -\frac{d^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (3.2.8)$$

onde  $-\partial p/\partial x$  é o gradiente de pressão, considerado conhecido. Observe que o perfil de velocidade é parabólico, simétrico com relação ao eixo-x. A velocidade média  $V$  é simplesmente  $2/3$  de  $u_{\max}$ , que ocorre no centro ( $y=d/2$ ) enquanto a vazão (por unidade de largura do canal entre as placas)  $Q^*$  é o produto de  $V$  por  $d$ , ou

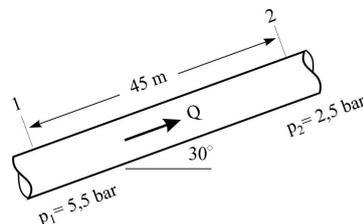
$$V = -\frac{d^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad e \quad Q^* = -\frac{d^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2.9)$$

Levando  $-\partial p/\partial x$  na equação de Darcy-Weisbach, (3.1.13)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = f \frac{1}{d} \frac{\rho V^2}{2} \quad com \quad f = \frac{24}{Re} \quad e \quad Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (3.2.10)$$

Note a similaridade da solução com aquela do escoamento para duto circular. O limite para escoamento laminar é  $Re < Re_{\text{crit}} \approx 2000$ .

**Exemplo 3.2.1** Um óleo com  $\rho=900 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade cinemática  $\nu=0,0002 \text{ m}^2/\text{s}$  escoar por um duto de 75 mm de diâmetro interno, conforme mostrada na figura abaixo. As pressões e elevações são conhecidas nas seções 1 e 2, afastadas 45m uma da outra. Admitindo escoamento laminar: a) verificar o sentido do escoamento; b) calcular  $h_f$  entre 1 e 2; c) calcular  $Q$ ,  $V$  e  $Re$ ; d) determinar se o escoamento é realmente laminar?



**Solução:** Inicialmente calculemos a viscosidade e a cota  $z_2$ .  $\mu = \rho\nu = 900 \times 0,0002 = 0,18 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ .  $z_2 = 45 \times \sin 30 = 45 \times 0,5 = 22,5 \text{ m}$ .

a) Para determinar o sentido do escoamento é necessário avaliar os valores da linha piezométrica em 1 e 2. O escoamento se dá no sentido do valor maior para o menor; cf. Eq. (3.1.1).

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = 0 + \frac{5,5 \times 10^5}{900 \times 9,81} = 62,3 \text{ m}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = 22,5 + \frac{2,5 \times 10^5}{900 \times 9,81} = 50,82 \text{ m}$$

Logo, como  $H_1 > H_2$  o escoamento ocorre no sentido de 1 para 2.

b) Para diâmetro uniforme a Eq. (3.1.1) indica que a perda de carga é medida pela diferença entre  $H_1$  e  $H_2$

$$h_f = H_1 - H_2 = 62,3 - 50,82 = 11,48 \text{ m}$$

c) A vazão, velocidade e o número de Reynolds são facilmente calculados (sob a hipótese de que o escoamento é laminar). Inicialmente, de (3.2.4), tendo em vista a definição de  $\phi$  em (3.1.10)

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{d\phi}{dx}\right) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{(H_1 - H_2)\rho g}{L} = 0,0079 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0,0079}{\pi \times 0,075^2/4} = 1,79 \text{ m/s}$$
$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1,79 \times 0,075}{0,0002} = 670$$

d) Confirmando a hipótese inicial; o escoamento é laminar.

### 3.2.3 Escoamento Turbulento

Vimos da Eq. (3.1.12) que o fator de atrito  $f$  deve ser função tanto do número de Reynolds quanto da rugosidade. Para escoamento laminar mostramos que este é função exclusivo do número de Reynolds, podendo ser obtido pela expressão (3.2.6) para  $Re < 2300$ . Os resultados de experimentos estão mostrados na Fig. 3.2.4. O diagrama é denominado de *diagrama*, ou gráfico, de Moody, publicado originalmente em 1944.

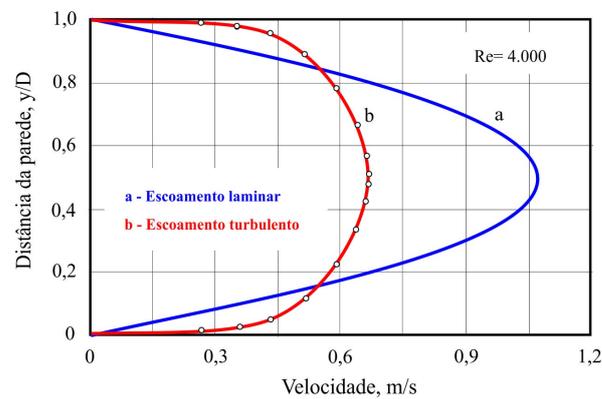
O diagrama mostra claramente que abaixo do número de Reynolds crítico (em torno de 2300) o escoamento é laminar. Para valores de Reynolds maiores do que cerca de 4.000 as curvas dependem de  $\varepsilon/D$ . Essas curvas correspondem a escoamentos inerentemente turbulentos. Entre 2.000 e 4.000 ocorre uma região de transição onde os dois tipos de escoamento podem ocorrer.

Deve ser observado do diagrama que para números de Reynolds muito elevados o fator de atrito torna-se praticamente constante, pouco dependente de Reynolds. Quando isto ocorre o escoamento é dito *completamente rugoso*, ou *completamente turbulento*. Valores para a rugosidade relativa para vários tipos de dutos são mostrados na Fig. 3.2.5.

Regiões definindo regimes de escoamentos laminar, de transição e turbulento são indicativos do que normalmente ocorre em problemas práticos de escoamento em dutos.

Em circunstâncias muito especiais, por um trabalho de definição de contornos suaves, reduzindo-se ao mínimo perturbações externas (como vibração), e admitindo fluxo no duto sob condições mínimas de perturbação, é possível estender os limites entre laminar e turbulento bem acima do valor crítico de 2300; em laboratório este limite pode chegar a valores bem superiores, como 40.000, ou mais.

A natureza do perfil de velocidade no escoamento turbulento é bastante diferente daquela do escoamento laminar. A Fig. 3.2.3 mostra os dois perfis com a velocidade indicada em função da distância da parede do tubo ( $D=1\text{ cm}$ ). Neste caso a velocidade média é de  $0,55\text{ m/s}$  e o número de Reynolds igual a  $4.000$ . A curva para o perfil laminar foi obtida a partir da Eq. (3.2.2). É considerável a diferença entre os dois perfis, embora a vazão volumétrica seja a mesma nos dois casos.



**Figura 3.2.3** Perfis de velocidade laminar e turbulento para a mesma vazão, Ref. Knudsen e Katz <sup>3</sup>

<sup>3</sup> Knudsen, J.G., Katz, D.L, Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw Hill, Cap. 7, 1958.

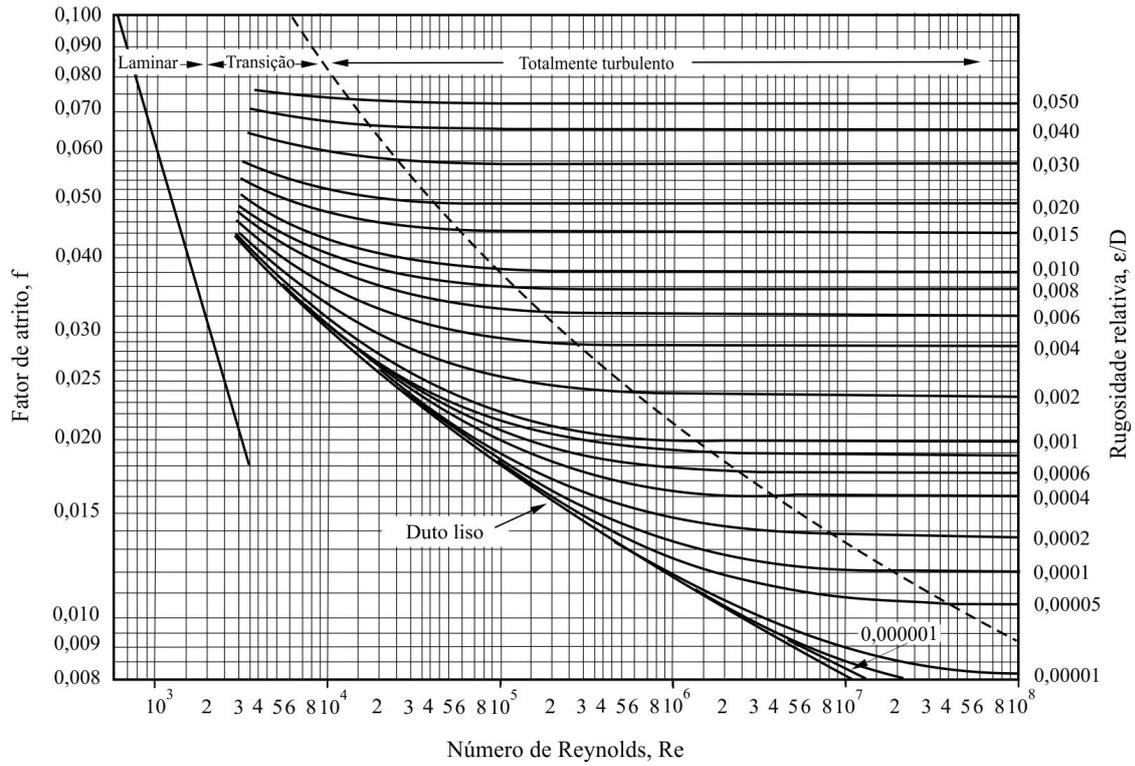


Figura 3.2.4 Diagrama de Moody para dutos com paredes lisas e rugosas.

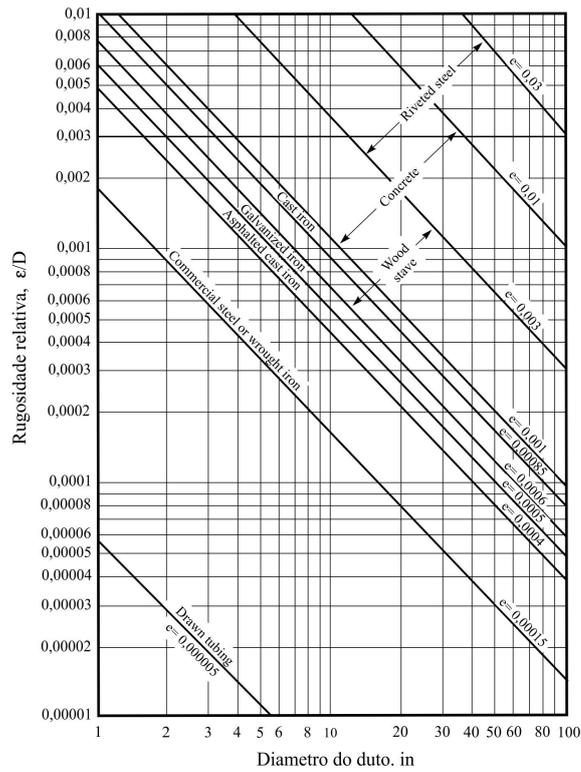
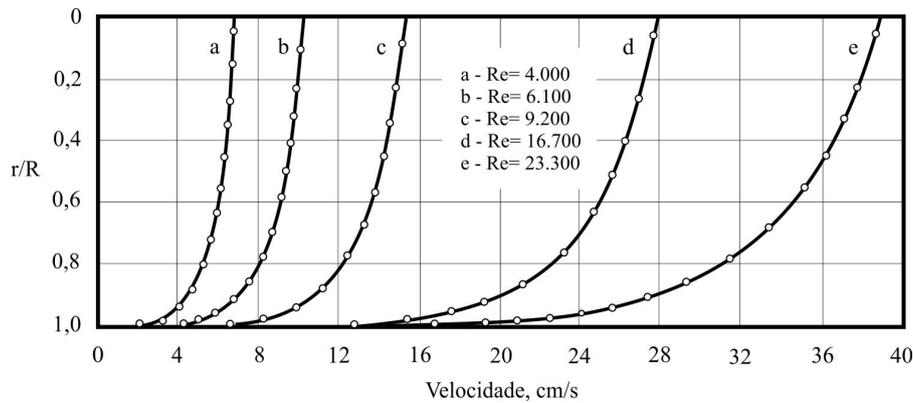


Figura 3.2.5 Rugosidade relativa para dutos novos. Nota:  $\epsilon$  em ft (pés), não em in.

Na Fig. 3.2.6 são mostrados os perfis de velocidade num tubo (D= 1cm) para diversos números de Reynolds turbulento variando entre 4.000 e 23.300<sup>4</sup>. As curvas têm a mesma forma geral com valor máximo no centro e tendência para valor nulo na parede. Em todos os casos ocorre um elevado gradiente de velocidade du/dy junto à parede



**Figura 3.2.6** Perfis de velocidade turbulenta em um tubo liso, Ref. Knudsen e Katz *op cit*.

É de grande interesse examinar e compreender bem a natureza dos perfis de velocidade no regime turbulento. Uma expressão simples e satisfatória para o perfil de velocidade em *dutos lisos* é

$$\frac{u(r)}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (3.2.11)$$

onde  $n$  depende do número de Reynolds. Valores típicos para  $n$  para vários valores de  $Re$ , determinados por J. Nikuradse (1932), *op. cit.*, estão mostrados na Tabela 3.2.1.

**Tabela 3.2.1** Variação de  $n$  com o número de Reynolds

Re	$4 \times 10^3$	$2,3 \times 10^4$	$1,1 \times 10^5$	$1,1 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$3,2 \times 10^6$
n	6	6,6	7	8,8	10	10

Pesquisadores concluíram há muito tempo que seria mais fácil e preciso subdividir a região da parede ao centro do duto em perfis de velocidade distintos em vez de buscar uma expressão única, como a proposta pela Eq. (3.2.11).

<sup>4</sup> Nikuradse, J, VDI-Forschungsheft Arbeit Ing. Wes., 356, 1932.

### 3.2.4 Dutos Lisos

A análise de escoamento em dutos lisos ( $\varepsilon \approx 0$ ) sugere que este possa ser subdividido em três regiões. Na primeira, próxima da parede, o escoamento é quase laminar. Nesta região a velocidade é muito pequena e o perfil de velocidade é considerado linear. A partir da equação de Newton na parede

$$\tau_o = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_o \quad (3.2.12)$$

onde  $y = R - r$ . Então, para uma relação linear para a velocidade,

$$u = \frac{\tau_o}{\mu} y \quad (3.2.13)$$

dividindo esta equação pela velocidade de atrito (3.1.15)

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} = y^+ \quad (3.2.14)$$

A região em que esta equação é válida é denominada *sub-região laminar*. Assim a velocidade adimensional  $u/u^*$  é igual ao número de Reynolds local baseado na velocidade de atrito e na distância à parede do duto.

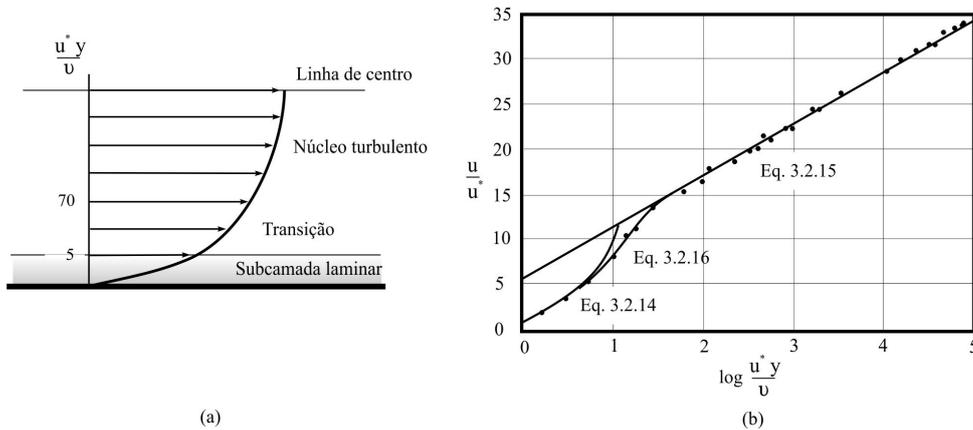
A região fora da sub-região laminar é subdividida em duas. Próximo ao centro do duto, sub-região constituída pelo *núcleo turbulento*, o escoamento é considerado praticamente independente das condições existentes próximo à parede. Entre o núcleo turbulento e a sub-camada laminar fica a *região intermediária* (*buffer zone* em inglês). O perfil de velocidade assume a forma mostrada na Fig. 3.2.7; observe que as duas regiões próximas à parede estão fora de proporção.

Uma excelente representação para o perfil de velocidade no núcleo turbulento é dada por

$$\frac{u}{u^*} = 5,50 + 5,75 \log_{10} \frac{u^* y}{\nu} \quad (3.2.15)$$

enquanto na região intermediária

$$\frac{u}{u^*} = -3,05 + 11,5 \log_{10} \frac{u^* y}{\nu} \quad (3.2.16)$$



**Figura 3.2.7** Duto liso: a) sub-regiões para escoamento; b) distribuição de velocidade.

A faixa de validade dessas equações é

$$\begin{aligned}
 \frac{u^*y}{\nu} < 5 & \quad \textit{subcamada laminar} \\
 5 < \frac{u^*y}{\nu} < 70 & \quad \textit{transição} \\
 \frac{u^*y}{\nu} > 70 & \quad \textit{núcleo turbulento}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.17}$$

Uma ordem de grandeza dessas variáveis é obtida se imaginarmos um duto liso de 12" de diâmetro transportando 115.000 bbl/dia de óleo cru com  $\nu=5 \times 10^{-5}$ . Os parâmetros encontrados são (verifique esses valores):

- velocidade média,  $V= 3$  m/s
- $Re= 18.000$
- $f= 0,027$
- velocidade de atrito,  $u^*= 0,175$  m/s
- espessura da sub-camada laminar,  $\delta= 1,4$  mm

### 3.2.5 Dutos Rugosos

Com frequência, dutos utilizados em estruturas de engenharia não são considerados lisos, mas rugosos. A resistência ao escoamento causada pela parede rugosa é maior do que aquela prevista pelas expressões para dutos lisos. Conseqüentemente as leis de atrito em dutos rugosos são de grande importância prática.

Importante variável na análise dos escoamentos turbulentos em dutos rugosos é a altura da sub-camada laminar  $\delta$  definida pela Eq. (3.2.14) para  $y^+= 5$  – limite da sub-

camada

$$\delta = \frac{5v}{u^*} = \frac{5v}{V} \sqrt{\frac{8}{f}} = 5 \sqrt{\frac{8}{f}} \frac{D}{Re} \quad \therefore \quad \frac{\delta}{D} = 5 \sqrt{\frac{8}{f}} \frac{1}{Re} \quad (3.2.18)$$

Como vimos, conhecidos os valores básicos do escoamento (vazão ou perda de carga) a velocidade de atrito  $u^*$  pode ser determinada, Eq. (3.1.15), e assim o valor de  $\delta$ .

O perfil de velocidade para escoamento em dutos rugosos pode ser expresso analiticamente numa forma semelhante à dos dutos lisos. Experimentos mostram que para situações em que a rugosidade média  $\varepsilon$  é superior a  $\delta$  ( $\varepsilon > \delta$ ) o duto deve ser considerado *completamente rugoso*. Nesses casos o perfil de velocidade pode ser estimado pela equação

$$\frac{u}{u^*} = B + 5,75 \log_{10} \frac{y}{\varepsilon} \quad (3.2.19)$$

onde  $B=8,5$  para escoamento totalmente turbulento, Fig. 3.2.8.

Por outro lado, dutos para os quais  $\varepsilon < \delta$  são denominados *hidraulicamente lisos*, obtendo-se para a velocidade

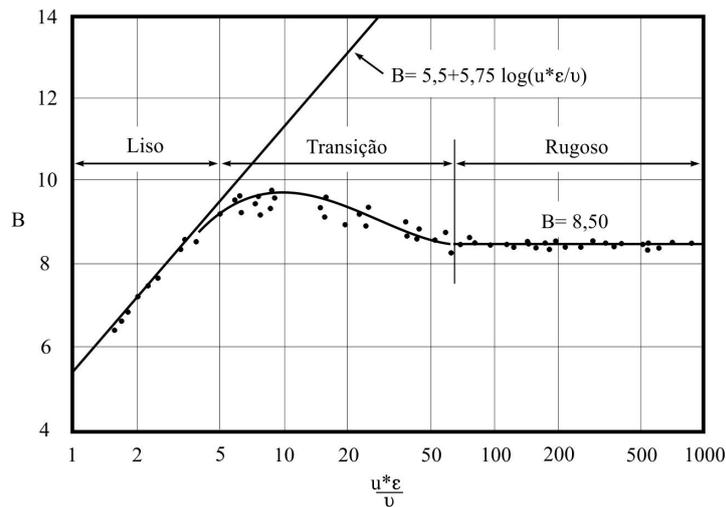
$$\frac{u}{u^*} = 5,5 + 5,75 \log_{10} \frac{u^* y}{v} \quad (3.2.20)$$

Observe que esta equação é exatamente a mesma obtida para o núcleo turbulento para dutos lisos, Eq. (3.2.15).

### **Influência da Rugosidade nas Perdas por Atrito**

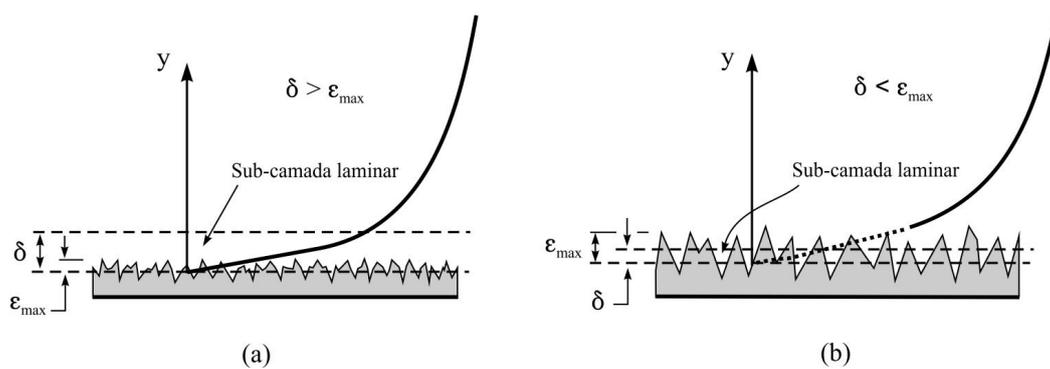
A experiência mostra que as condições para o escoamento nas vizinhanças da parede dependem da altura relativa entre a espessura da sub-camada laminar e a rugosidade da parede, conforme mostrado na Fig. 3.2.9.

Se o número de Reynolds é tal que o valor numérico de  $\delta$  é superior a  $\varepsilon$  a rugosidade da parede encontra-se submersa dentro da sub-camada laminar, Fig. 3.2.9a, não interferindo na formação da sub-camada e da região de transição.



**Figura 3.2.8** Parâmetro de rugosidade B versus  $u^*\epsilon/v$

Como acabamos de ver, o perfil de velocidade é o mesmo para duto liso, justificando a denominação de *hidraulicamente liso*. Por outro lado, quando  $\delta$  é inferior a  $\epsilon$ , Fig. 3.2.9b, a rugosidade rompe a sub-camada laminar, intensificando a turbulência. No escoamento laminar a rugosidade não tem influência na perda de carga uma vez que não existe troca de quantidade de movimento na seção transversal. Se todos os picos da rugosidade permanecem dentro da sub-camada laminar a parede é considerada *hidraulicamente lisa*, ou seja, apresenta um fator de atrito mínimo. À medida que o número de Reynolds cresce, a sub-camada  $\delta$  diminui, (3.2.18), podendo se aproximar dos picos rugosos na parede. Se os picos forem consideravelmente maiores do que a espessura da sub-camada laminar a parede torna-se *hidraulicamente rugosa*. Vórtices se descolam dos picos, criando uma condição de arraste de forma (geometria) que trocam quantidade de movimento com o fluxo principal. No *domínio totalmente rugoso* as perdas tornam-se independentes do número de Reynolds crescendo com o quadrado da velocidade com fator de atrito  $f$  na equação de Darcy-Weisbach (3.1.14). Na região de transição entre hidraulicamente liso e rugoso somente os picos maiores estão acima do limite da sub-camada laminar; somente esses aumentam a resistência do escoamento que passa depender do número de Reynolds e da rugosidade. Ou seja, a rugosidade relativa  $\epsilon/D$  torna-se um parâmetro relevante em dutos rugosos e a equação para a distribuição de



**Figura 3.2.9** Efeito da rugosidade na distribuição da velocidade turbulenta: (a)  $\delta > \epsilon_{\max}$  (b)  $\delta < \epsilon_{\max}$

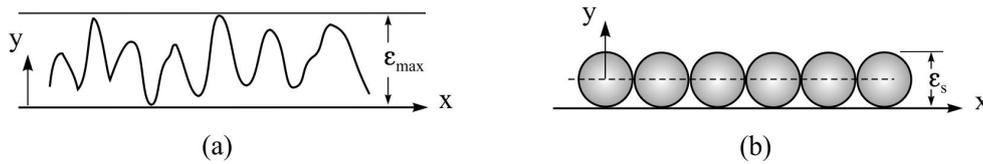
velocidade passa a ser função do número de Reynolds e da rugosidade relativa  $\epsilon/D$ .

A profundidade da rugosidade  $\epsilon_{\max}$  é obtida por superfícies envelopes dos picos e vales, Fig. 3.2.10a. Dificuldades em realizar esta medida por *perfilômetro de rugosidade* sugerem o uso de *placas padrões de rugosidade*, comparando-se, por toque, por exemplo, a superfície e o padrão. A rugosidade é definida pela norma ISO 1320 por classes N1, N2 etc. onde a rugosidade aumenta pelo fator dois de uma classe para outra. Destaque-se que a rugosidade da superfície  $\epsilon_a$  é obtida da altura média da rugosidade referida à linha de centro

$$\epsilon_a = \frac{1}{L} \int_0^L |y| dx \quad (3.2.21)$$

Dependendo da superfície, a razão entre a rugosidade máxima e média varia tipicamente entre 4 e 7,  $\epsilon_{\max}/\epsilon_a = (4 \text{ a } 7)$ . Uma superfície lixada pode ter este valor reduzido para algo em torno de 1,4.

Uma vez que pode existir um número infinito de possibilidades para o perfil de rugosidade uma rugosidade padrão foi introduzida para descrever os efeitos desta no escoamento. Isto é geralmente feito admitindo que a superfície é coberta por uma camada de esferas densamente aglomeradas, mostrado na Fig. 3.2.10b. Desta forma a rugosidade padrão é denominada *rugosidade de areia*. O diâmetro das esferas define a rugosidade  $\epsilon_s$ , que passa ser considerada como a medida da rugosidade da superfície. Neste texto definimos também a rugosidade sem o subscrito,  $\epsilon = \epsilon_s$ .



**Figura 3.2.10** Definição da rugosidade máxima,  $\epsilon_{\max}$ , e altura de rugosidade de areia,  $\epsilon_s$ .

Um fator de equivalência para as rugosidades é definido como a razão entre a rugosidade máxima e a rugosidade de areia,  $\phi_{eq} = \epsilon_{\max}/\epsilon_s$ ,

$$\phi_{eq} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_s} \quad (3.2.22)$$

Dividindo a rugosidade máxima pelo fator de equivalência obtém-se a rugosidade equivalente  $\epsilon_s$ , que produz o mesmo coeficiente de atrito (Darcy ou Fanning, para dutos). Em termos da rugosidade de superfície, definida em (3.2.21), a rugosidade  $\epsilon_s$  pode ser calculada por (fator 6 utilizado como intermediário entre 4 e 7)

$$\epsilon_s \approx \frac{6\epsilon_a}{\phi_{eq}} \quad (3.2.23)$$

Valores típicos de  $\phi_{eq}$  são mostrados na Tabela 3.2.2.

**Tabela 3.2.2** Fator de equivalência de rugosidade.

Condição da superfície	$\phi_{eq}$
Marcas perpendiculares à direção do fluxo	2
Marcas paralelas à direção do fluxo	5
Tubos de metal forjado	2 a 2,6
Cobertura suave (pinturas)	0

A Tabela 3.2.3 mostra a rugosidade de areia equivalente para algumas superfícies, de acordo com a norma DIN 1952 <sup>5</sup>

<sup>5</sup> Schlichting, H., Gersten, K., *Boundary Layer Theory*, Cap. 17, 8ª Ed., Springer-Verlag, USA, 2003.

**Tabela 3.2.3** Rugosidade equivalente de areia,  $\epsilon_s$ , para algumas superfícies - DIN 1952, Ref. Schlichting, H, Gersten, K. 2003 <sup>6</sup>

Material	Condição da superfície/material	$\epsilon_s$ (mm)
Latão, cobre, alumínio, plástico, vidro	liso, sem depósitos	< 0,03
Aço	novo, sem costura, forjado a frio	< 0,03
	novo, sem costura, forjado a quente	0,05 a 0,10
	novo, soldado longitudinalmente	
	novo, soldado em espiral	0,10
	ligeiramente enferrujado	0,10 a 0,20
	enferrujado	0,20 a 0,30
	enferrujado severamente	1 a 3
	encrustado	0,50 a 2
	muito encrustado	> 2
	betumizado, novo	0,03 a 0,05
	betumizado, normal	0,10 a 0,20
	galvanizado	0,13
Ferro fundido	novo	0,25
	enferrujado	1,0 a 1,5
	encrustado	> 1,5
	betumizado, novo	0,03 a 0,05
Cimento asbesto	novo, sem cobertura	< 0,03
	usado, sem cobertura	0,05
Duto de concreto	novo	1 a 3

**Cuidado!** Um dos pontos críticos de incerteza quando se calcula perdas por atrito no escoamento turbulento em dutos consiste na determinação da rugosidade. Se for calculada incorretamente, por um fator 2, por exemplo, a incerteza no cálculo da perda de pressão pode ficar entre 15 a 35%; compare no diagrama de Moody para a condição de escoamento totalmente rugoso, Fig. 3.2.4.

É interessante notar que os limites que definem se um duto pode ser considerado hidraulicamente liso, de transição, ou completamente rugoso são obtidos pelas equações a seguir, ver Fig. 3.2.8:

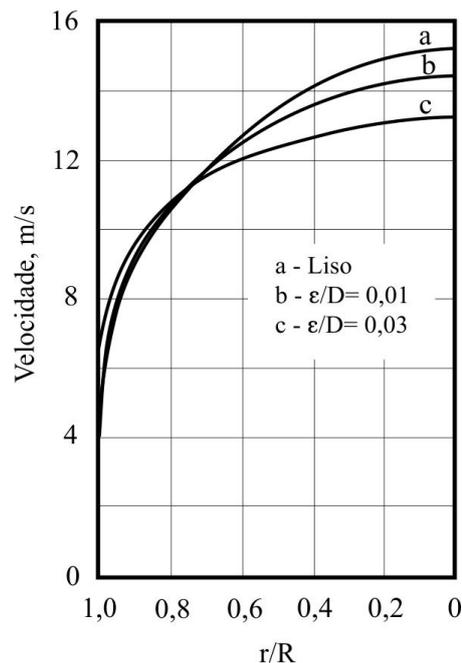
---

<sup>6</sup> Schlichting, H., Gersten, K. *op cit.* pag. 532.

$$\begin{aligned}
\frac{u^* \epsilon_{\max}}{\nu} < 5 & \quad \textit{liso} \\
5 < \frac{u^* \epsilon_{\max}}{\nu} < 70 & \quad \textit{transi\c{c}\~{a}o} \\
\frac{u^* \epsilon_{\max}}{\nu} > 70 & \quad \textit{completamente rugoso}
\end{aligned}
\tag{3.2.24}$$

Os limites s\~{a}o os mesmos utilizados para os diferentes regimes de escoamento em dutos lisos, exceto pela substitui\c{c}\~{a}o de  $y$  por  $\epsilon_{\max}$ , Eq. (3.2.17).

A diferen\c{c}\~{a} entre os perfis de velocidade de tubos lisos e rugosos \~{e} mostrada na Fig. 3.2.11. Neste caso a distribui\c{c}\~{a}o de velocidade est\~{a} indicada em fun\c{c}\~{a}o do raio para uma mesma vaz\~{a}o de l\~{i}quido (\~{a}gua) para diferentes condi\c{c}\~{o}es da superf\~{i}cie. O gr\~{a}fico indica que o perfil de velocidade se achata na medida que a superf\~{i}cie tende a ficar mais rugosa. Por outro lado, a teoria mostra que para um mesmo n\~{u}mero de Reynolds (situa\c{c}\~{a}o na figura) o fator de atrito cresce com o aumento da rugosidade relativa; portanto, o gradiente de velocidade na parede  $du/dy$  tende a aumentar junto \~{a} esta uma vez que  $f = f(\tau_o)$  e  $\tau_o = \mu (du/dy)_o$ , Eq. (3.1.12); i.e.  $(du/dy)_{oc} > (du/dy)_{ob} > (du/dy)_{oa}$ .



**Figura 3.2.11** Perfis de velocidade para diferentes condi\c{c}\~{o}es de rugosidade na parede do duto, Ref. Knudsen e Katz *op cit*.

### 3.2.6 Fator de Atrito em Dutos Lisos e Rugosos

Analisando as expressões para os diversos perfis de velocidade sugeridos para escoamentos em dutos lisos e rugosos é possível encontrar expressões analíticas para o fator de atrito em função do número de Reynolds e da rugosidade relativa. A literatura apresenta uma grande quantidade de expressões que são em geral variantes das equações históricas, consideradas ainda hoje fundamentais nesses estudos. Mostramos aqui algumas das equações clássicas e de uso em projeto de dutos.

#### Dutos Lisos

Para dutos lisos e  $4 \times 10^3 < Re < 10^7$ , a equação clássica é devido a Ludwig Prandtl <sup>7</sup>,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,80 + 0,869 \ln(Re \sqrt{f}) \quad (3.2.25)$$

Contudo, uma expressão mais recente considerada pouco mais precisa do que a de Prandtl é devido a Zagarola e Smits <sup>8</sup>, válida para a faixa  $10^5 < Re < 3,5 \times 10^7$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,3577 + 0,820 \ln(Re \sqrt{f}) \quad (3.2.26)$$

Note que essas equações são implícitas, requerendo algum processo iterativo de resolução. A literatura apresenta grande quantidade de alternativas em que  $f$  pode ser determinado explicitamente, como a equação de Blasius <sup>9</sup>, válida para  $4 \times 10^3 < Re < 10^5$

$$f = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (3.2.27)$$

ou de Colebrook <sup>8</sup>, para  $4 \times 10^3 < Re < 10^7$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,78175 \ln\left(\frac{Re}{7}\right) \quad (3.2.28)$$

---

<sup>7</sup> Prandtl, L., Über den Reibungswiderstand Strömender Luft, Ergeb.Aerodyn.Versuchanstalt, Göttingen, 3, 1927.

<sup>8</sup> Zagarola, M.V., Smits, A.J., Reynolds Number Dependence of the Mean Flow in a Circular Pipe, AIAA-97-0649, 35<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, 1997.

<sup>9</sup> Rohsenow, W.M., Hartnet, J.P, Cho, Y.I., Handbook of Heat Transfer, Table 5.8, Cap.5, McGraw-Hill Co., 3rd. Ed., 1998.

## Dutos Rugosos

Relações similares foram obtidas para o fator de atrito para escoamento completamente turbulento; isto é, para escoamento quando a rugosidade da parede rompe a sub-camada laminar e de transição atingindo a região do núcleo turbulento. Seguem duas equações para esta situação. A primeira, devido a Nikuradse (1933), válida para escoamento totalmente turbulento e  $Re_\varepsilon = u^*\varepsilon_{\max}/\nu > 70$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 0,87 \ln\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (3.2.29)$$

A segunda é a aclamada expressão de Colebrook-White (1939) que cobre os três regimes: hidraulicamente liso, de transição e totalmente rugoso

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,87 \ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}}\right) \quad (3.2.30)$$

Esta é a fórmula geralmente aceita para cálculo do coeficiente de atrito viscoso em escoamento turbulento. Moody utilizou-a para construir seu diagrama mostrado na Fig. 3.2.4. A equação é precisa em aproximadamente  $\pm 15\%$  em toda a região de aplicação quando comparada com o diagrama de Moody. Pode ser utilizado em escoamento de dutos circulares ou não, assim como em canais abertos. Embora aplicável para todo o campo de rugosidade relativa e de número de Reynolds a equação é particularmente precisa para a região de transição; ou seja, para  $Re < Re_\varepsilon$ , onde  $Re^* = u^*\varepsilon_{\max}/\nu = 70$  e  $Re_\varepsilon = 200/[(\varepsilon_{\max}/D)\sqrt{f}]$  (Reynolds de transição). Para valores de Reynolds superiores a  $Re_\varepsilon$  o escoamento é dito *totalmente rugoso*, ou *totalmente turbulento*, enquanto o fator de atrito é independente do número de Reynolds, podendo ser obtido a partir da equação de Nikuradse (3.2.29).

## Expressões Explícitas para o Fator de Atrito

A expressão geral de Colebrook, embora precisa, é implícita para o cálculo de  $f$ . A literatura, cf. v.g. Rohsenow et al.<sup>10</sup> apresenta diversas alternativas para  $f$  na forma explícita que podem ser utilizadas diretamente, ou como primeira aproximação para

---

<sup>10</sup> Rohsenow, W. M. et. al. *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, Cap. 5, 1998.

(3.2.30). Uma dessas é a expressão proposta por Haaland <sup>11</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,7368 - 0,7818 \ln \left[ \left( 2 \frac{\varepsilon}{D} \right)^{1,11} + \frac{63,635}{Re} \right] \quad (3.2.31)$$

a equação apresenta um desvio máximo com relação à equação de Colebrook da ordem de 1,2% no intervalo  $4 \times 10^3 < Re < 10^8$  e  $1 \times 10^{-8} < \varepsilon/D < 0,05$ .

Outra relação é devida a Swamee e Jain <sup>12</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,7385 - 0,8686 \ln \left[ 2 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{42,48}{Re^{0,9}} \right] \quad (3.2.32)$$

Neste caso o desvio máximo estimado com relação à equação de Colebrook é de 3,2% no intervalo  $4 \times 10^3 < Re < 10^8$  e  $1 \times 10^{-8} < \varepsilon/D < 0,05$ . Observe que nas duas expressões a rugosidade relativa é multiplicada por 2.

Mais recentemente Ghanbari et al <sup>13</sup> apresentam uma equação a partir de uma análise estatística tendo por base o diagrama de Moody. Após comparação com dez outras expressões disponíveis na literatura os autores sugerem que esta equação produz resultados superiores sobre todas as equações analisadas para ampla faixa da rugosidade e do número

$$f = \left\{ -1,52 \log_{10} \left[ \left( \frac{\varepsilon/D}{7,21} \right)^{1,042} + \left( \frac{2,731}{Re} \right)^{0,9152} \right] \right\}^{-2,169} \quad (3.2.33)$$

de Reynolds nos intervalos  $4 \times 10^3 < Re < 10^8$  e  $0 < \varepsilon/D < 0,05$ .

Outras expressões mais recentes para o fator de atrito f podem ser obtidas nos artigos de Lukman e Oke <sup>14</sup> e Muzzo et al. <sup>15</sup>.

<sup>11</sup> Haaland, S.E. "Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flows", J. Fluid Eng. ASME, (105), 89-90, 1983.

<sup>12</sup> Swamee, P.K., Jain, A.K., "Explicit Equation for Pipe-Flow Problems", J. Hydraulic Div., Proc. ASCE (102), 657-664, 1976.

<sup>13</sup> Ghanbari, A., Farshad F.Fred., Rieke, H.H., "Newly Developed Friction factor Correlation for Pipe Flow and Flow Assurance", J. Chemical engineering and Materials Science, Vol. 2(6), pp. 83-86, June 2011.

<sup>14</sup> Lukman, S., Oke, I.A. "Accurate Solutions of Colebrook-White's Friction Factor Formulae", NIJOTECH, Vol. 36, No.4, pp. 1039-048, Oct. 2017.

<sup>15</sup> Muzzo, L.E. et al. "Accuracy & Speed Analysis of Pipe Friction Factor Correlations", 2<sup>n</sup> International Congress on Engineering and Sustainability - The XXI Century (INCREaSE), Oct. 2019.

### 3.2.7 Redução de Arraste pela Adição de Polímeros

A expressão *redução de arraste* é utilizada na literatura para designar a redução no gradiente de pressão observada nos escoamentos turbulentos em dutos resultante da adição de pequenas quantidades de certas substâncias à fase líquida. Experimentos indicam que a redução no arraste deve-se à uma mudança na estrutura da turbulência. A maior parte dos estudos teóricos e experimentais nesta área estão associados aos efeitos de soluções diluídas de polímeros (da ordem de 50 a 200 partes por milhão) de peso molecular elevados (50.000 ou mais). A longa cadeia de macromoléculas de polímeros reduz a turbulência de pequena escala, cf. Landahl <sup>16</sup>, (pequenos turbilhões) na zona de transição  $5 < y^+ < 70$ . Como primeira aproximação observa-se que o polímero atua sobre a constante B na equação (3.2.19) enquanto a constante multiplicando o logaritmo permanece praticamente inalterada. O aumento no valor de B depende do peso molecular do polímero e da sua concentração. Todavia, experimentos indicam que somente uma parte da turbulência pode ser reduzida pela adição de polímeros não importando a concentração desses; por isso, o escoamento laminar nunca é obtido por este processo. Um boa revisão sobre os fundamentos de redução de arraste é encontrada em Virk <sup>17</sup>, enquanto detalhes interessantes podem ser igualmente obtidos em Lumley <sup>18</sup> e Gampert <sup>19</sup>.

Virk sugere que para dutos lisos o limite para a maior redução no arraste para a adição de polímeros pode ser obtido pela expressão

$$\frac{1}{\sqrt{f_p}} = -19,06 + 4,126 \ln(Re \sqrt{f_p}) \quad (3.2.34)$$

onde  $f_p$  representa o fator de atrito (Darcy) mínimo obtido com a adição de polímero. Esta equação pode ser comparada com aquela proposta por Prandtl (3.2.25), que representa a lei para fluidos newtonianos para dutos lisos.

A Tabela 3.2.4 abaixo mostra os valores dos fatores de atrito para *dutos lisos*

---

<sup>16</sup> Landahl, M.T., "Drag Reduction by Polymers", Proc. 13th. Int. Congress Theoretical and Applied Mechanics, Moscow, 177-199, Springer-Verlag, 1973.

<sup>17</sup> Virk, P.S., "Drag Reduction Fundamentals", AIChE., no. 21, 625, 1975.

<sup>18</sup> Lumley, J.L., "Drag Reduction in Turbulente Flow by Polymer Additives", J. Polym. Sci. Macromol. Rev., (7), 263-290, 1978.

<sup>19</sup> Gampert, B., (Ed.) "The Influence of Polymer Additives on Velocity and Temperature Fields", Springer-Verlag, 1985.

calculados pela expressão de Prandtl ( $f$ ) e a equação sugerida por Virk ( $f_p$ ), Eqs. (3.2.25) e (3.2.34), respectivamente. A coluna da direita representa a razão entre os dois coeficientes, indicando que para número de Reynolds entre 3.000 e 40.000 o fator de atrito mínimo obtido com adição de polímero varia entre 57% e 24% do fator de atrito do fluido sem polímero; ou seja, uma redução entre 43% e 76%.

**Tabela 3.2.4** Fator de atrito versus Reynolds em dutos lisos.  
Fluido sem polímero ( $f$ ) e fluido com polímero ( $f_p$ ).

Reynolds	$f$	$f_p$	$f_p/f$
3000	0,0435	0,0248	0,57
5000	0,0374	0,017	0,45
10000	0,0309	0,0108	0,35
20000	0,0259	0,0073	0,28
40000	0,022	0,0052	0,24

### 3.2.8 Rugosidade Absoluta - Oleodutos e Gasodutos

Vimos neste capítulo como estimar a perda de energia por atrito viscoso em dutos a partir de parâmetros do escoamento. A equação de Darcy-Weisbach permite determinar de forma elegante a queda de pressão em função da massa específica, da velocidade média, do diâmetro, da distância entre os pontos de interesse e do coeficiente de atrito  $f$ . Este, por outro lado, depende do número de Reynolds e da rugosidade relativa sendo fortemente dependente desta nos escoamentos com altos números de Reynolds. Desta forma, a estimativa de  $f$  torna-se tarefa importante no projeto de dutos. De um modo geral, a experiência e o acesso à uma boa literatura são fundamentais para estimar o fator de atrito com precisão. Todavia, deve-se ter em perspectiva outros fatores, como o aumento da rugosidade com o envelhecimento da instalação, ou a sua redução, na aplicação de coberturas protetoras no interior do duto.

No caso específico de oleodutos e gasodutos novos Mohitpour<sup>20</sup> sugere que se pode admitir como referência para a rugosidade absoluta  $\epsilon$  valores entre 15 e 30  $\mu\text{m}$  (15 e 30  $\times 10^{-6}$  m). Caso uma cobertura (epóxi/poliamida) seja aplicada, um valor típico para  $\epsilon$  fica

---

<sup>20</sup> Mohitpour, M., Golshan, H., Murray, A., *Pipeline Design & Construction: A Practical Approach*, ASME Press, USA, 2000.

entre 5 e 8  $\mu\text{m}$ . Segundo Golshan e Narsing<sup>21</sup>, em Mohitpour *op. cit.*, esses valores podem crescer à taxa de 0,7 a 1,3  $\mu\text{m}$  por ano devido à erosão, corrosão e outros problemas. Os autores destacam que a taxa de deterioração de dutos com cobertura é bem menor, ficando entre 0,2 e 0,4  $\mu\text{m}/\text{ano}$ .

**Tabela 3.2.5** Rugosidades para dutos novos.

Duto	Rugosidade abs. ( $\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ )
Oleodutos	20 a 30
Gasodutos	15 a 20
Pintura	5 - 8

A Tabela 3.2.5 resume algumas condições sugeridas para a rugosidade absoluta médias para dutos novos. Observe que para um número de Reynolds de 30.000 em um oleoduto de 12” a rugosidade relativa com base no valor sugerido pela tabela é  $1 \times 10^{-4}$  ( $\epsilon/D = 30 \times 10^{-6}/0,30$ ). O diagrama de Moody, Fig. 3.2.4, indica que para esta rugosidade o escoamento tem comportamento de duto liso com  $f \approx 0,024$ . De forma análoga, para um gasoduto de 20” e Reynolds da ordem de  $10 \times 10^6$  obtém-se uma rugosidade relativa de  $3 \times 10^{-5}$ . De novo, o diagrama indica um comportamento próximo de duto liso, com  $f \approx 0,009$ . O ponto a ser destacado é que os valores da Tabela 3.2.5 sugerem que, na média, as rugosidades relativas devem estar próximas de valores que conduzem à condição de escoamento hidraulicamente liso. Rugosidades muito menores do que as sugeridas tendem a encarecer desnecessariamente o duto, enquanto que valores muito superiores levarão o escoamento para a condição de hidraulicamente rugoso tornando o custo operacional (bombeamento) muito elevado. Note-se ainda que para manter a rugosidade relativa dentro dessas faixas dutos menores requerem rugosidades absolutas menores (mais lisos) do que dutos maiores.

### 3.3 Diâmetro Hidráulico

Grande parte das aplicações de escoamento em dutos refere-se àquelas de seção reta circular, inclusive neste livro. Nem sempre isto é verdadeiro uma vez que dutos podem ter

---

<sup>21</sup> Golshan, H., Narsing, M., *Study of Pipeline Deterioration due to Age (Phase I)*, Design Methods & Technology Facilities Planning, Nova Gas Transmission Ltd., Internal Report, Calgary, Canada, 1994.

diversas outras geometrias. Quando ocorre escoamento em duto não-circular uma prática comum consiste em calcular um diâmetro efetivo tal que o comportamento do escoamento no duto circular seja aproximadamente equivalente àquele do duto não-circular. Um dos critérios adotados na determinação do diâmetro equivalente baseia-se na razão entre o quádruplo da área da seção e o perímetro molhado do fluido denominado diâmetro hidráulico; i.e.  $D_h = 4A/P$ . Esta expressão aparece ao se igualar a força média devida ao atrito viscoso na parede do duto com a queda de pressão corresponde.

Deve-se ter em conta que, a despeito da extensa aplicação em engenharia, o conceito encerra aproximações. Por exemplo, o escoamento num duto com cantos muito vivos, como o triangular, a tensão cisalhante é nula nos vértices e máxima no meio dos lados. A utilização de um valor médio para a tensão cisalhante (difícil de ser calculada) tende a remediar o problema. mas incorpora um grau de incerteza ao qual devemos estar atentos para não incorrerem em sérios erros. Por outro lado, talvez a maioria dos casos práticos de escoamento em dutos não-circulares refere-se a geometrias simétricas, ou quase simétricas, não muito distintas do círculo, o que torna a aplicação do conceito mais razoável. Exemplos relativamente comuns são seções quadradas, retangulares, anulares concêntricas e anulares não-concêntricas.

Se o fluido ocupa toda a seção reta do duto (isso não ocorre, por exemplo, no escoamento em canais), o diâmetro hidráulico para as situações mencionadas são:

a) Quadrado (lado =  $a$ )

$$D_h = \frac{4 a^2}{4 a} = a \quad (3.3.1)$$

b) Retângulo (lados=  $a$  e  $b$ )

$$D_h = \frac{4 a b}{2(a+b)} = \frac{2 a b}{a+b} \quad (3.3.2)$$

### **Dutos com Geometria Anular**

Por tratar de uma geometria encontrada com alguma freqüência em instalações industriais, analisemos algumas expressões para o diâmetro equivalente para dutos formando uma geometria anular Fig. 3.3.1.

Consideremos inicialmente a aplicação direta do conceito de diâmetro hidráulico (ou equivalente) conforme definido acima

$$D_e = \frac{4\pi(d_2^2 - d_1^2)/4}{\pi(d_2 + d_1)} = d_2 - d_1 \quad (3.3.3)$$

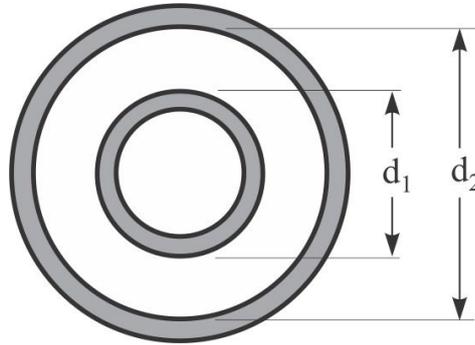


Figura 3.3.1 Dutos concêntricos

Observe que para  $d_1 = 0$  (sem duto interno), o diâmetro hidráulico reduz-se ao diâmetro interno  $d_2$ .

Um segundo critério baseia-se na solução analítica do escoamento laminar de dutos concêntricos. Nesse caso a solução da Eq. (3.2.1), com as condições de contorno apropriadas, conduz ao diâmetro <sup>22</sup>

$$D_e = \sqrt{d_2^2 + d_1^2 - \frac{d_2^2 - d_1^2}{\ln(d_2/d_1)}} \quad (3.3.4)$$

Uma terceira expressão é obtida a partir da aproximação do escoamento entre os cilindros para duas placas planas paralelas. A solução analítica para o escoamento laminar da equação correspondente à Eq. (3.2.1) para coordenadas retangulares reduz-se a

$$D_e = \sqrt{\frac{2}{3}}(d_2 - d_1) \approx 0,816(d_2 - d_1) \quad (3.3.5)$$

Para razões de diâmetros  $d_1/d_2 > 0,3$  as duas últimas equações produzem resultados

---

<sup>22</sup> R. B. Bird, W.E. Stewart, E.N., Lightfoot, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Cap. 2, 2001.

praticamente iguais. As três expressões são bastante utilizadas na prática, sendo (3.3.3) possivelmente a mais usada. Observe que o diâmetro hidráulico para dutos não-concêntricos é o mesmo de concêntricos. Contudo, as características do escoamento (vazão, queda de pressão) neste caso são muito diferentes daquelas observadas na geometria anular concêntrica. Em resumo, situações particulares de geometria complexa requerem o conhecimento do diâmetro equivalente mais apropriado. Em geral a literatura moderna fornece expressões para essas situações.

Para finalizar, deve ser destacado que o conceito de diâmetro hidráulico definido pela Eq. (3.3.3) é bastante apropriado para calcular a queda de pressão e troca de calor, como veremos mais adiante em escoamento turbulento (consideravelmente mais preciso do que no regime laminar) enquanto a geometria do duto não for exageradamente assimétrica, ou especialmente delgada <sup>8</sup>.

### **3.4 Equações de Conservação – Soluções Numéricas**

As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia até aqui consideradas são apresentadas sob formas simplificadas, sendo em geral sugerido a utilização de tabelas, gráficos e diagramas para obtenção da solução. Na análise de problemas reais o engenheiro raramente realiza seu trabalho sem o auxílio de um computador. Assim, por exemplo, os resultados do diagrama de Moody podem ser facilmente obtidos programando-se as equações de Prandtl (3.2.25), Blasius (3.2.27) ou Colebrook (3.2.30). Valores encontrados em tabelas ou gráficos para coeficientes de perdas localizadas ou rugosidade relativa podem ser gerados a partir de correlações e convertidos em um código numérico. Em resumo, qualquer estudo envolvendo o projeto ou análise de uma instalação existente, ou em projeto, é resolvido por métodos computacionais.

Para tornar o estudo do escoamento em dutos mais completo apresentamos a seguir uma breve introdução à formulação das equações de conservação, escritas numa forma mais apropriada à solução numérica de problemas de escoamento viscoso quando uma solução mais rigorosa assim o exigir. Todavia, os métodos numéricos de discretização das equações não são aqui apresentados.

---

<sup>8</sup> F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Co., Cap.6, 1974.

### 3.4.1 Hipóteses Simplificadoras

Uma das principais hipóteses na modelagem é de que o escoamento deve ser considerado unidimensional; ou seja, não estão previstas variações de propriedades em pontos diversos de qualquer seção transversal. As variáveis dependem somente de uma coordenada longitudinal, esquematizado na Figura 3.4.1. Na grande maioria dos casos esta hipótese é razoável, uma vez que o diâmetro do duto é muito pequeno relativo ao seu comprimento. Deve-se ter em conta, contudo, que nem sempre isso é verdadeiro. Por exemplo, o escoamento num curva longa provoca fluxos secundários, intensificando a dissipação viscosa local e, conseqüentemente, a perda de pressão. De forma análoga, o escoamento multifásico em duto de grande diâmetro pode apresentar um diferencial de pressão em certas seções transversais que nem sempre podem ser ignorados. Esses são casos particulares que merecem análises específicas; se merecerem modelagens mais sofisticadas, isto poderá ser feito por softwares especiais existentes no mercado.

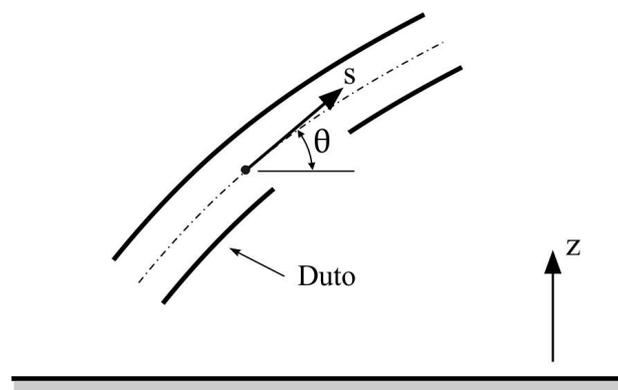


Figura 3.4.1 Coordenada longitudinal num duto

### 3.4.2 Equações de Conservação

Admitindo que o duto tem diâmetro variável (constante no tempo, entretanto), mesmo que definidos em segmentos onde esses sejam constantes, as equações básicas de continuidade e de quantidade de movimento podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (\rho v A) = 0 \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (\rho v^2 A) + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \text{sen} \theta + \frac{1}{2} \frac{f}{D} \rho |v| v = 0$$

onde  $s$  representa a coordenada ao longo do centro do duto,  $\theta$  o ângulo que um ponto genérico faz com a horizontal e  $A$  a área da seção transversal,  $A = A(s)$ .

Observe os seguintes pontos desta formulação:

- Os termos temporais são considerados. Logo, as equações são válidas para escoamento transiente;
- Os dois primeiros termos representam, respectivamente, variações de massa e quantidade de movimento com o tempo e fluxos de massa e quantidade de movimento por unidade de comprimento do duto;
- A apresentação das equações nesta forma facilita a discretização numérica, especialmente dos termos convectivos (segundos termos).

Deve-se destacar que combinando as Eqs. (3.4.1), e expandindo as derivadas dos dois primeiros termos, obtém-se a expressão clássica para conservação de quantidade de movimento

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin\theta - \frac{1}{2} \frac{f}{D} \rho |v|v \quad (3.4.2)$$

Observe que o último termo (análogo à equação de Darcy-Weisbach) contém o produto  $|v|v$  ( $|v| \rightarrow$  valor absoluto de  $v$ ). O motivo é simples: a primeira forma permite considerar o sinal da perda de carga em função do sinal da velocidade, ou seja, a pressão sempre cai no sentido do fluxo, seja este positivo ou negativo. O mesmo não ocorre, evidentemente, com a utilização do termo  $v^2$  pois este, sendo sempre positivo, mantém o sinal positivo para a perda de carga, qualquer que seja o sentido de  $v$ .

A equação de conservação de energia é escrita na forma, Eqs. (2.4.1) a (2.4.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v e A) = Q_w - \frac{\partial Q_c}{\partial s} + \Phi \quad (3.4.3)$$

onde  $Q_w$ ,  $Q_c$  e  $\Phi$  representam, respectivamente, calor trocado pela parede do duto, calor transferido por condução (axialmente) e termo devido à dissipação viscosa. Temos ainda as definições,

$$\begin{aligned}
e &= \hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \\
h &= \hat{u} + \frac{p}{\rho} \\
Q_w &= -U(T - T_{ext})
\end{aligned}
\tag{3.4.4}$$

onde  $e$  e  $h$  representam a energia total e a entalpia por unidade de massa do fluido. Além disso  $T$  é a temperatura média na seção transversal,  $T_{ext}$  a temperatura externa ao duto e  $U$  o coeficiente global de troca de calor entre o fluido (interior do duto) e o meio externo (solo, ar, água etc.), veja detalhes no §9.3 – Capítulo 9.

Ignorando o termo de condução de calor axial ( $\partial Q_c / \partial s$ ) – normalmente muito pequeno quando comparado com os outros –, o termo devido à dissipação viscosa  $\Phi$  é, em geral, também pequeno e a equação de energia pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{u}) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s}[\rho v A (h + \frac{v^2}{2} + gz)] = \frac{Q_w}{A}
\tag{3.4.5}$$

As equações (3.4.1) e (3.4.5) permitem modelar problemas transientes envolvendo o escoamento de fluidos e troca de calor em dutos em geral. Três incógnitas estão presentes  $p$ ,  $v$  e  $T$ ; i.e.: pressão, velocidade e temperatura. A equação de estado permite calcular a relação funcional entre a massa específica e pressão e temperatura  $\rho = \rho(p, T)$ . Outras equações relacionando a energia interna e entalpia com pressão e temperatura são igualmente necessárias, assim como expressões para o coeficiente global de troca de calor  $U$  (ver §9.3), e o coeficiente de atrito viscoso  $f$  de Darcy em função de outros parâmetros.

### 3.4.3 Regime Permanente

Definindo a expressão para o fluxo de massa

$$\dot{m} = \rho v A
\tag{3.4.6}$$

as equações de conservação para o regime permanente ( $\partial/\partial t = 0$ ) tornam-se:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial s} = 0 \quad \therefore \quad \dot{m} = cte.$$

$$\frac{\dot{m}}{A} \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{f}{D} \rho |v| v \quad (3.4.7)$$

$$Q_w = \dot{m} \frac{\partial}{\partial s} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

Admitindo calor específico constante então  $\delta h = c_p \delta T$  e a equação de energia pode ser simplificada para (combinando com a Eq. (3.4.4))

$$c_p \frac{\partial T}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + g \sin \theta = -\frac{1}{\dot{m}} U (T - T_{ext}) \quad (3.4.8)$$

Se ignorarmos os termos relativos à energia cinética e à gravidade, então temos

$$c_p \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{1}{\dot{m}} U (T - T_{ext}) \quad (3.4.9)$$

Conhecidas condições de contorno apropriadas, isto é, pressões ou vazões de entrada e saída, temperaturas externas e as expressões relacionando os diversos parâmetros ( $\rho$ ,  $f$ ,  $U$ ,  $c_p$  etc.) com as características do sistema (geometria, propriedades físicas etc.), as três equações em (3.4.7) podem ser resolvidas numericamente para definir os campos de pressão, velocidade e temperatura.

Finalmente, relembremos que a expressão utilizada para a equação de energia (3.4.5) ou (3.4.7c) admite que efeitos devido à dissipação viscosa e troca de calor por condução são pequenos e, por isso, não são considerados na equação. No caso em que esses termos são relevantes a expressão mais geral (3.4.3) deve ser utilizada.