

2 Introdução à Mecânica dos Fluidos

2.1 Distribuição de Pressão num Fluido

A Fig. 2.1 mostra uma pequena cunha de um fluido estacionário. Por definição não há tensão cisalhante, mas postulamos que as pressões p_x , p_z e p_n (médias nas faces) podem ser diferentes em cada face. O peso do elemento pode também ser importante. O equilíbrio requer que a soma das forças atuando sobre o mesmo seja nula. Para uma unidade de largura, ortogonal ao plano da figura

$$\sum F_x = p_x \delta z - p_n \delta s \sin\theta = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\sum F_z = p_z \delta x - p_n \delta s \cos\theta - \frac{1}{2} \rho g \delta x \delta z = 0$$

Mas a geometria da cunha é tal que

$$\delta s \sin\theta = \delta z \quad \delta s \cos\theta = \delta x \quad (2.1.2)$$

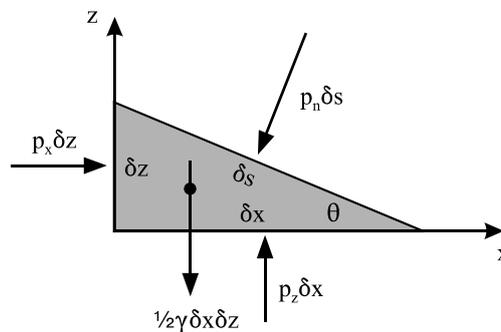


Figura 2.1 Elemento de fluido em equilíbrio estático

E assim, da Eq. (2.1.1)

$$p_x = p_n \quad p_z = p_n + \frac{1}{2} \rho g \delta z \quad (2.1.3)$$

Este resultado mostra dois princípios importantes da hidrostática: i- não existe variação de pressão no plano horizontal; ii- existe uma variação vertical na pressão, proporcional à profundidade z e ao peso específico ρg . Verificaremos isso em maior detalhe na seção §2.1.3.

No limite $\delta z \rightarrow 0$, a Eq. (2.1.3) torna-se

$$p_x = p_z = p_n = p \quad (2.1.4)$$

ma vez que o ângulo θ é arbitrário concluímos que a pressão num ponto num fluido estacionário é independente da orientação, ou seja, do ângulo θ .

Consideremos agora um elemento de fluido conforme indicado na Fig. 2.1.2. A resultante das forças de pressão atuando na direção- x é dada por

$$\sum F_x = p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.1.5)$$

Expressões análogas são obtidas para as duas outras direções normais. A força de pressão resultante por unidade de volume atuando sobre o fluido torna-se

$$\mathbf{f}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}\right) = -\nabla p \quad (2.1.6)$$

Portanto, é o gradiente de pressão que provoca uma força, que deve ser contrabalançada por outras forças atuando no fluido como gravidade, viscosidade e inércia.

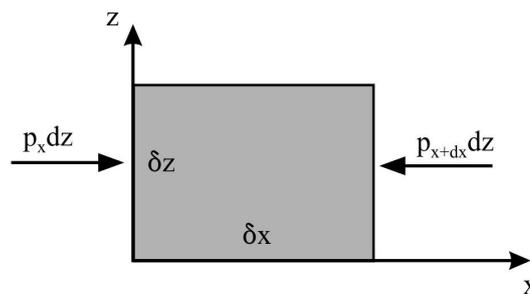


Figura 2.1.2 Forças devido à pressão na direção- x .

2.1.1 Condição de Equilíbrio

A força resultante de pressão é superficial, por isso é denominada força de superfície. Por outro lado, forças de corpo atuam sobre a massa do fluido, como a gravidade

$$\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g} \quad (2.1.7)$$

No caso mais geral existem outras forças de superfície como aquelas devido às forças viscosas. A resultante das forças viscosas atuando na unidade de volume de um elemento de fluido incompressível com viscosidade constante é obtida da expressão

$$\mathbf{f}_v = \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.1.8)$$

onde \mathbf{V} é o vetor velocidade, μ a viscosidade e $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ o operador laplaciano. Observe-se ainda que \mathbf{g} é o vetor aceleração local da gravidade que atua na direção do centro da terra.

A soma dessas forças deve manter o fluido em equilíbrio, ou provocar o seu movimento com a aceleração. Logo, a equação do movimento do fluido torna-se

$$\sum \mathbf{f} = \rho \mathbf{a} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.1.9)$$

Esta é uma das formas simplificadas da conhecida equação de *Navier-Stokes* que constitui a base de toda a ciência da mecânica dos fluidos. Além da equação de conservação de quantidade de movimento é necessário introduzir a equação de conservação de massa, também denominada *equação de continuidade*. Para fluidos compressíveis

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.1.10)$$

que, para o caso incompressível ($\rho = \text{constante}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1.11)$$

2.1.2 Pressões Absolutas e Relativas

Engenheiros gostam de utilizar medidas de pressão de duas maneiras; como pressão

- *Absoluta*, onde a referência é a pressão termodinâmica nula.
- *Relativa*, à pressão atmosférica.

No segundo caso a pressão pode ser superior ou inferior à atmosférica. Se for superior a diferença é denominada de *pressão manométrica* (*gauge*, em inglês), se for inferior é chamada de *vácuo*.

A pressão atmosférica padrão (760 mm de coluna de mercúrio) corresponde a 101325 Pascal (N/m²). Em resumo,

$$p_{atm} = 101325 \text{ Pa} = 14,696 \text{ psi} \quad (2.1.12)$$

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm}$$

2.1.3 Distribuição da Pressão Hidrostática

Se o fluido se mantiver no estado estacionário, ou com velocidade constante, então, por definição, $\mathbf{a} = 0$ e $\nabla^2 \mathbf{V} = 0$. A equação de Navier-Stokes, (2.1.9), reduz-se a

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (2.1.13)$$

Esta é a distribuição hidrostática, válida para qualquer fluido estacionário (ou com velocidade constante relativo a um referencial inercial), não dependendo do valor da viscosidade uma vez que o termo viscoso se anula.

Devemos lembrar do Cálculo que o vetor gradiente de pressão ∇p expressa o valor numérico da máxima variação espacial da propriedade escalar p (pressão). Por esse motivo a Eq. (2.1.13) expressa a condição para que um fluido em equilíbrio hidrostático alinhe suas superfícies de pressão constante ortogonalmente ao vetor aceleração de gravidade \mathbf{g} . Ou seja, na condição hidrostática, planos de superfícies horizontais (normais a \mathbf{g}), apresentam pressões uniformes, constantes.

É comum utilizar um sistema de coordenadas tal que a direção- z aponta ‘para cima’ da superfície terrestre, portanto

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (2.1.14)$$

onde g é o valor da gravidade local (pode variar ao longo da superfície terrestre). Assim ficamos com as seguintes equações

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.1.15)$$

As duas primeiras indicam que p é independente de x e y (plano paralelo à superfície terrestre). A distribuição de pressão é obtida da integral da terceira equação

$$p_2 - p_1 = - \int_1^2 \rho g dz \quad (2.1.16)$$

Esta é a solução do problema hidrostático. Gases e líquidos são tratados diferentemente devido ao comportamento diferenciado da massa específica ρ com a pressão.

Pode-se então concluir sobre a condição hidrostática: “a pressão num fluido contínuo e uniformemente distribuído varia somente com a distância vertical, sendo independente da forma do reservatório”. A pressão é a mesma em todos os pontos localizados num plano horizontal no fluido. A pressão aumenta com a profundidade no fluido ¹.

Uma ilustração desse resultado é mostrado na Fig. 2.1.3. A superfície livre do reservatório está em contato com a atmosfera formando um plano horizontal. Pontos a, b, c, d estão à profundidades iguais num plano horizontal, estando interconectados pelo mesmo fluido, água, neste exemplo; portanto, todos estão à mesma pressão. O mesmo se aplica aos pontos A, C e D, localizados no fundo do reservatório. Entretanto, o ponto B, embora à mesma profundidade dos outros pontos, está à uma pressão distinta uma vez que se encontra sob a ação de um fluido diferente, tetracloreto de carbono, no caso, com massa específica distinta da água, $\rho \approx 1590 \text{ kg/m}^3$.

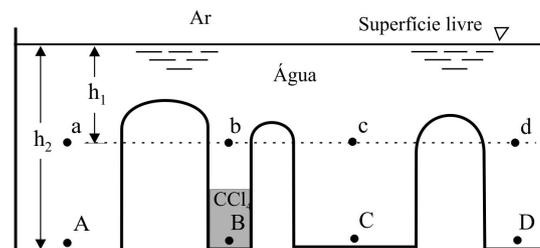


Figura 2.1.3 Distribuição hidrostática num reservatório com água e CCl4

¹ No segundo século antes de Cristo, Arquimedes de Siracusa (287-212 AC) postulou que, pela sua natureza, fluidos não podem ter “espaços vazios”, isto é, eles têm que ser contínuos (um conceito já definido por Aristóteles dois séculos antes). E, “se partes de um fluido são contínuas e uniformemente distribuídas, então aquelas que são menos comprimidas são forçadas por aquelas mais comprimidas”. Dois importantes conceitos da Mecânica dos Fluidos clássica estão aí representados: 1- pressão aplicada a qualquer parte de um fluido é transmitida para qualquer outra parte daquele fluido; 2- o escoamento de um fluido é provocado, e mantido, por forças de pressão. Arquimedes, matemático, físico, engenheiro e astrônomo grego é considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica

2.1.4 Pressão Hidrostática em Líquidos

Líquidos são praticamente incompressíveis, de forma que, na maioria dos casos (nem sempre!), podemos desprezar a variação da massa específica com a pressão. Neste caso a integração da Eq. (2.1.16) fornece a expressão para um plano-z arbitrário, Fig. 2.1.4,

$$p(z) = p_1 - \rho g(z - z_1) \quad (2.1.17)$$

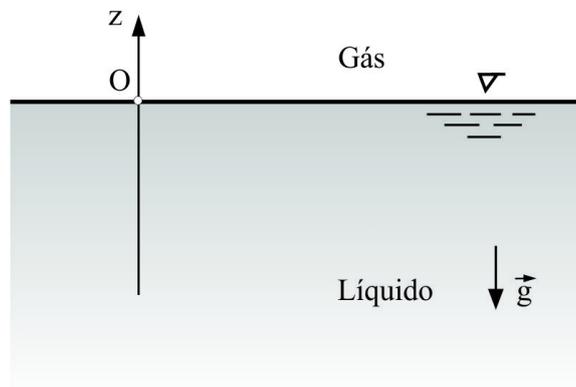


Figura 2.1.4 Distribuição de pressão hidrostática num líquido.

Observemos que p_1 é especificado no plano z_1 . Se definirmos como referência este plano e $\delta z = z - z_0$ podemos reescrever a equação na forma geral

$$p(z) = p_o - \rho g \delta z \quad (2.1.18)$$

lembrando que z aponta positivamente para cima (contra o sentido da gravidade). Portanto, a equação indica que a pressão *decrece* a medida que “subimos” no fluido. Se dividirmos por ρg o termo resultante $p/\rho g$ é denominado de *altura de pressão* (*pressure head* em inglês), uma vez que tem a dimensão de z , i.e., de comprimento.

Exercício 2.1.1 A lâmina d’água num ponto da Bacia de Campos é de 1850m. Admitindo massa específica média de 1032 kg/m^3 para a água na região, estimar a pressão no fundo do mar, em pascal e psi.

Solução: Para $g = 9,7876 \text{ m/s}^2$ (cf. Observatório Nacional, <http://www.on.br>), da Eq. (2.1.16) obtém-se

$$p(x) = p_o - \int_0^x \rho g dz = 0 - 1032 \times 9,7876 \times (-1850) = 18,68 \text{ MPa} \quad (2.787 \text{ psi})$$

2.1.5 Pressão Hidrostática em Gases

Gases são compressíveis, com a massa específica variando com a pressão e temperatura. Se admitirmos comportamento próximo de gases perfeitos, $p = \rho RT$. Logo, de (2.1.15)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g \quad (2.1.19)$$

Separando as variáveis e integrando entre os pontos 1 e 2

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T} \quad (2.1.20)$$

A integral com respeito a z requer o conhecimento da função da temperatura com z , i.e. $T(z)$. Uma aproximação comum é a condição isotérmica $T = T_0$; então

$$p(z) = p_1 \exp \left[-\frac{g(z - z_1)}{RT_0} \right] \quad (2.1.21)$$

Esta é uma boa aproximação para a terra. Todavia, a temperatura média da atmosfera terrestre decai aproximadamente linearmente com a altitude até cerca de 11 km, i.e. $T \approx T_0 - Bz$, onde T_0 é a temperatura na superfície do mar e B é uma constante, ambas variando durante o dia! Os seguintes valores são freqüentemente utilizados: $T_0 = 15^\circ\text{C}$ e $B = 0,0065^\circ\text{C/m}$.

Introduzindo esta função na Eq. (2.1.20) obtém-se a expressão mais precisa

$$p(z) = p_a \left(1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{g/RB} \quad (2.1.22)$$

Para o ar o expoente g/RB (adimensional!) tem o valor de 5.256.

Exercício 2.1.2 Se a atmosfera padrão é 101325 Pa, calcular a pressão na altitude de 3050 m para as três hipóteses mencionadas. Obs. O valor correto (observado por medição) é $p(3050\text{m}) = 69,640 \text{ kPa}$.

Solução:

a) Temperatura constante:

$$p = 101325 \times \exp \left[-\frac{9,806 \times 3050}{287 \times 288,15} \right] = 70,573 \text{ kPa}$$

b) Temperatura decaindo linearmente:

$$p = 101325 \times \left[1 - \frac{0,0065 \times 3050}{273,15 + 15} \right]^{5,256} = 101325 \times (0,93120)^{5,256} = 69,664 \text{ kPa}$$

c) Massa específica constante: Admitindo massa específica para a condição padrão, $\rho g \approx 1,204 \times 9,806 = 11,81 \text{ N/m}^3$. Portanto,

$$p = p_a - \rho g z = 101325 - 11,81 \times 3050 = 65,304 \text{ kPa}$$

Composição do Ar

Ar é uma mistura de gases cuja composição pode variar, mesmo na superfície terrestre ($z=0$), sobretudo pela presença de umidade e de gases, como dióxido de carbono. A Tabela 2.1.1 mostra a composição volumétrica (molar) normal do ar limpo no nível do mar adotada em acordos internacionais de padrões atmosféricos.

A Fig. 2.1.5 mostra as distribuições de temperatura e pressão na atmosfera terrestre até a altitude de 100 e 50 km, respectivamente. Note a forma zig-zag para a temperatura e exponencial para a pressão. Admitindo uma temperatura aproximada de $-45 \text{ }^\circ\text{C}$ para 10.000 metros (altitude próxima dos vôos internacionais), a pressão calculada pela Eq. (2.1.22) é

$$p = 101325 \times \left[1 - \frac{0,0065 \times 10000}{273,15 + 15} \right]^{5,26} \times 10^{-5} = 0,263 \text{ bar}$$

um valor muito próximo do indicado na Fig 2.1.5b

Tabela 2.1.1 Composição do ar seco no nível do mar ²

Gás	Fr. molar %	Fr. massa %	Massa molar g/mol	Fr. molar g/mol
Nitrogênio - N ₂	0,78084	0,75517	28,013	21,87367
Oxigênio - O ₂	0,20948	0,23141	31,998	6,70294
Argônio - A	0,00934	0,01279	39,948	0,37311
Dióxido de carbono - CO ₂	0,000314	0,000627	44,001	0,018170
Neônio	0,00001818	0,000081	20,1800	0,000366
Helio	0,00000524	0,000058	4,000	0,000021
Metano	0,00000191	0,000087	16,0410	0,000306
Outros ³	0,000006	--	39,948	000020
Total	1,000008	1,000000	28,96833	28,96833

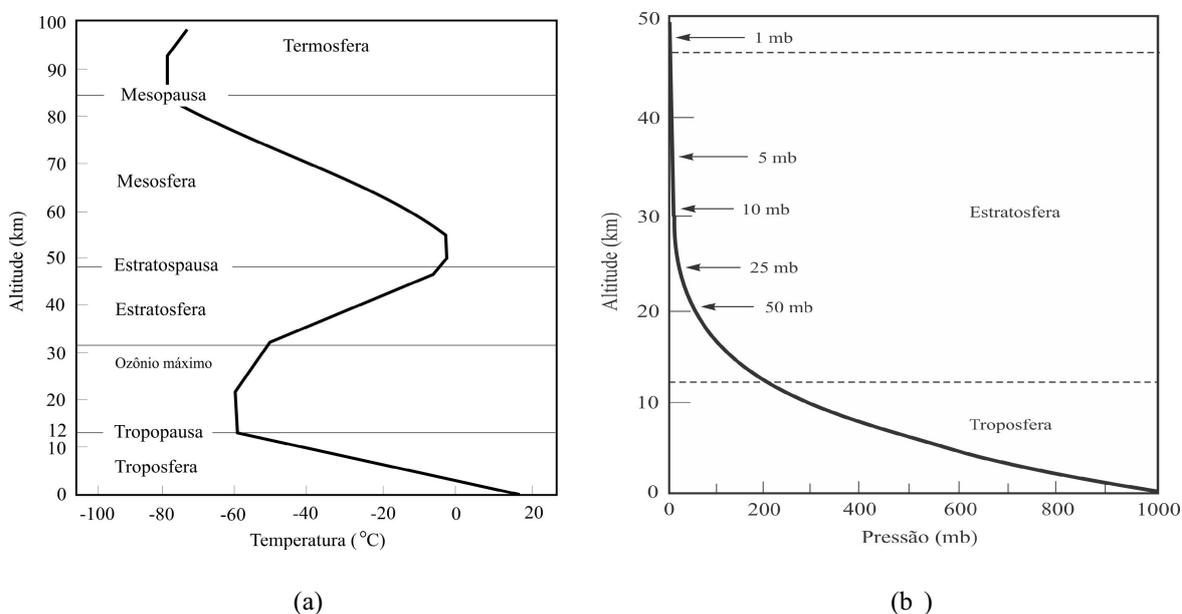


Figura 2.1.5 Distribuição de temperatura e pressão na atmosfera terrestre. Ref. North Carolina State University - Climate Office, USA ⁴.

² CRC Handbook of Chemistry and Physics (97th ed.), CRC Press, p. 14-3, 2016-2017.

³ Inclui: xenônio, criptônio, hidrogênio e vapor d'água (não considerado acima).

⁴ <https://climate.ncsu.edu/edu/structure>, em dezembro de 2020.

2.1.6 Manômetros

Manômetros são aparelhos que utilizam colunas de líquidos para determinar diferenças de pressão. O manômetro mais elementar é denominado *piezômetro*, mostrado na Fig. 2.1.6a; ele mede pressões manométricas positivas. Admitamos que A seja a seção transversal de um duto (reservatório etc) onde instalamos um tubo de vidro verticalmente. O líquido sobe no tubo até atingir a condição de equilíbrio estático. A pressão no duto é dada pela altura do líquido $h = (p_A - p_{atm})/\rho g$, medida do menisco até o ponto onde se deseja a pressão, no caso, A.

Para medir pequenos diferenciais de pressão (positivos ou negativos) pode-se utilizar a configuração mostrada na Fig. 2.1.6b. Observe que a pressão em A é negativa, i.e. está abaixo da atmosférica.

Eventualmente, para maiores valores de pressão, pode-se utilizar um segundo líquido de massa específica maior conforme indicado na Fig. 2.1.6c. Este líquido deve ser imiscível com o outro fluido, podendo este ser um gás. Partindo do ponto A a equação para a condição de equilíbrio hidrostático é

$$p_A + \rho_1 g h_2 - \rho_2 g h_1 - p_{atm} = 0 \quad (2.1.23)$$

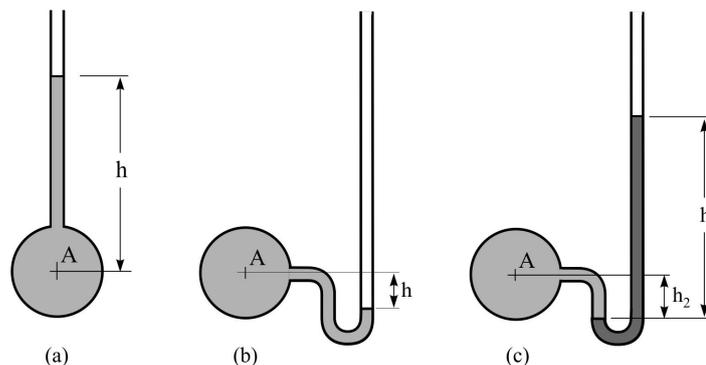


Figura 2.1.6 Manômetros simples.

Conhecendo-se as massas específicas e as alturas dos respectivos fluidos obtém-se o valor da pressão em A. O procedimento geral para problemas envolvendo manômetros é:

- Comece numa extremidade e escreva a pressão ali;
- Acrescente a esta a mudança de pressão de um menisco até o próximo (mais se o próximo estiver abaixo, menos se estiver acima);
- Continue até atingir a outra extremidade do manômetro, igualando a expressão à pressão neste ponto, sendo esta conhecida ou não.

A expressão conterá uma única incógnita para um manômetro simples, ou fornecerá a diferença entre pressões para um manômetro diferencial. A expressão geral tomará a forma

$$p_A - \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \rho_{i-1} g = p_B \quad (2.1.24)$$

onde z_0, z_1, \dots são as elevações de cada menisco e ρ_0, ρ_1, \dots as massas específicas dos fluidos nas respectivas colunas.

Um manômetro diferencial, Fig. 2.1.7, determina a diferença de pressões entre os pontos A e B quando a pressão real em qualquer ponto do sistema não pode ser determinada. A aplicação do procedimento acima na Fig. 2.1.7a conduz a

$$p_A - p_B = h_1 \rho_1 g + h_2 \rho_2 g - h_3 \rho_3 g \quad (2.1.25)$$

De forma análoga, para a Fig. 2.1.7b

$$p_A - p_B = -h_1 \rho_1 g + h_2 \rho_2 g + h_3 \rho_3 g \quad (2.1.26)$$

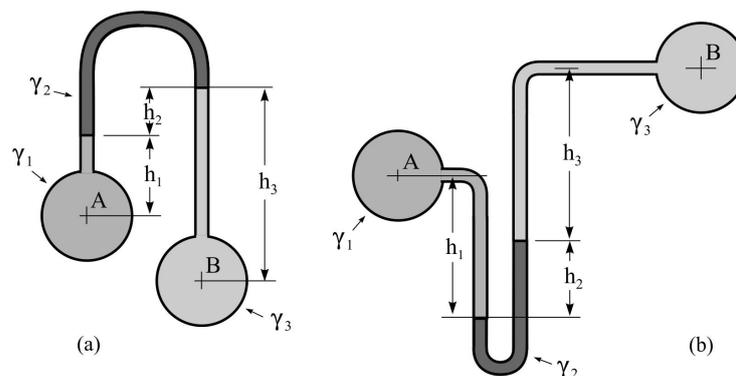


Figura 2.1.7 Manômetros diferenciais

Exercício 2.1.3 Na Fig. 2.1.7a os líquidos A e B são água e óleo com densidade relativa $\gamma_o = 0,80$; $h_1 = 300$ mm; $h_2 = 200$ mm; $h_3 = 600$ mm. a) Estime $p_A - p_B$; b) Se $p_B = 50$ kPa e o barômetro indica uma pressão de 730 mm de Hg (absoluta), estime a pressão absoluta em A. Temperatura ambiente é de 20 °C e o valor da gravidade local é $g = 9,806$ m/s².

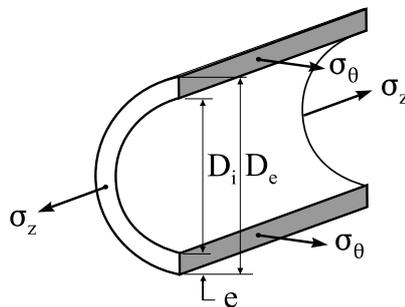
Solução:

Exemplo 2.1.5 Um duto transportando óleo apresentou um vazamento conseqüente de uma trinca na parte superior da linha. Estimar o volume de líquido vazado devido à descompressão do óleo até atingir a pressão externa para um segmento entre duas válvulas de bloqueio fechadas distantes 25 km. Dados da linha: duto NPS 16 ($D_i=387,4\text{mm}$, $D_e=406,4\text{mm}$), módulo de elasticidade $E=2\times 10^{11}\text{ Pa}$, razão de Poisson $\nu=0,30$, módulo de compressibilidade isotérmica do óleo $K_T=13,1\times 10^8\text{ Pa}$, massa específica do óleo $\rho=867\text{ kg/m}^3$, pressão interna imediatamente anterior ao vazamento, $p_o=8,27\text{ MPa}$ ($\approx 1200\text{ psi}$), pressão externa $p_{\text{ext}}=p_{\text{atm}}$. Veja também solução deste problema para tempos de esvaziamento em §6.5.

Solução: Duas condições de contorno importantes podem ser consideradas para o problema. O duto pode estar simplesmente apoiado sobre a superfície, sem ancoragens importantes que limitem sua movimentação axial, ou estar enterrado. Neste caso, admite-se que o atrito entre o duto e o solo é tal que este é impedido de movimentar-se axialmente. Consideremos as duas soluções do problema.

1. Duto Livre

A partir das condições de equilíbrio encontramos as seguintes expressões para as tensões circunferenciais e axiais, conforme indicado na figura



$$\sigma_{\theta} = \frac{LD_i \delta p}{2Le} = \frac{D_i}{2e} \delta p \quad ; \quad \sigma_z = \frac{\pi D_i^2 / 4 \delta p}{\pi(D_e^2 - D_i^2) / 4} = \frac{D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} \delta p = C_o \frac{D_i}{4e} \delta p \quad \text{onde } C_o = \frac{1}{1 + e/D_i} \quad (1)$$

Da lei de Hooke para estado plano de tensões temos as equações

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu \sigma_z) \quad e \quad \epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_{\theta}) \quad (2)$$

Da razão do incremento de massa para a massa inicial encontramos

$$\begin{aligned} m = \rho AL \quad \therefore \quad \frac{\delta m}{m} &= \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta L}{L} \\ &= \frac{\delta \rho}{\rho} + 2\epsilon_{\theta} + \epsilon_z \\ &= \frac{\delta p}{K_T} + \frac{2}{E}(\sigma_{\theta} - \nu \sigma_z) + \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_{\theta}) \\ &= \frac{\delta p}{K_T} \left\{ 1 + \frac{D_i K_T}{2eE} \left[2 + \frac{C_o}{2} - (1 + C_o)\nu \right] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ou ainda

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{\delta p}{K_T^e} \quad \text{onde} \quad K_T^e = \frac{K_T}{1 + \frac{D_i K_T}{2eE} \left[2 + \frac{C_o}{2} - (1 + C_o)v \right]} \approx \frac{K_T}{1 + \left(\frac{5}{4} - v \right) \frac{D_i K_T}{eE}} \quad (4)$$

Onde o módulo de compressibilidade isotérmica do fluido é definido como: $K_T = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$. Na aproximação acima foi utilizado $C_o=1$. Integrando esta equação para $D_i \approx \text{constante}$ e $K_T \approx \text{constante}$, obtém-se

$$\frac{V}{V_o} \approx \frac{m}{m_o} = \exp\left(\frac{P - P_o}{K_T^e}\right) \approx 1 + \frac{P - P_o}{K_T^e} \quad (5)$$

Portanto, a variação de volume de líquido com a pressão é calculada por

$$\delta V = V - V_o = \frac{V_o}{K_T^e} \delta p \quad (6)$$

Para os valores numéricos

$$K_T^e = \frac{K_T}{1 + 0,2476} = \frac{13,1 \times 10^8}{1,2476} = 10,50 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Assim, para o volume de líquido

$$\delta V = \frac{V_o}{K_T^e} \delta p = \frac{2946,8}{10,5 \times 10^8} \times 8,27 \times 10^6 = 23,21 \text{ m}^3$$

Onde $V_o = A_o \times L = 2946,8 \text{ m}^3$, e assim $\delta V = 23,21 \text{ m}^3$ (≈ 146 barris). Um belo estrago! Lembre-se que este volume corresponde somente à variação volumétrica devido à descompressão da linha; não inclui qualquer outra quantidade de óleo, como aquela armazenada no interior do duto descomprimido.

2. Duto Enterrado

Para esta situação a deformação axial é considerada nula. Portanto, de (2)

$$\varepsilon_z = 0 \quad \therefore \quad \sigma_z = \nu \sigma_\theta \quad e \quad \varepsilon_\theta = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_\theta \quad (7)$$

Com σ_θ definido em (1) a expressão para K_T^e torna-se

$$K_T^e = \frac{K_T}{1 + (1 - \nu^2) \frac{D_i K_T}{e E}} \quad (8)$$

Observe a similaridade desta equação com a Eq. (4). Para aço carbono, $\nu \approx 0,3$, os fatores de $D_i K_T / e E$ são, respectivamente, 0,95 e 0,91. Uma pequena diferença que, nas aplicações, produzem resultados praticamente iguais para K_T^e . Desta forma, para duto enterrado deste exemplo,

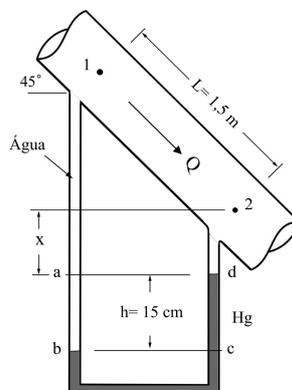
$$K_T^e = \frac{K_T}{1 + 0,2378} = \frac{13,1 \times 10^8}{1,2378} = 10,58 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Logo, para o volume do fluido pressurizado

$$\delta V = \frac{V_o}{K_T^e} \delta p = \frac{2946,8}{10,58 \times 10^8} \times 8,27 \times 10^6 = 23,03 \text{ m}^3$$

Neste caso o vazamento corresponde a 145 barris.

Exercício 2.1.6 Água escoava para baixo num duto formando 45° com a horizontal conforme indicado na figura ao lado. A queda de pressão $\Delta p = p_1 - p_2$ é parcialmente devido à gravidade e ao atrito viscoso entre os pontos 1 e 2. O manômetro de mercúrio ($\rho_{\text{Hg}} = 13280 \text{ kg/m}^3$) indica um diferencial de altura de 15cm. Calcular: a) a queda total de pressão $\Delta p = p_1 - p_2$, em Pascal; b) a queda de pressão entre os pontos 1 e 2 devido exclusivamente ao atrito viscoso em Pascal.



Solução: a) A diferença de pressão entre os dois pontos 1 e 2 é dada pela leitura do manômetro. Da figura vemos que as pressões em b e c são iguais, logo

$$p_1 + \gamma_w L \text{sen} 45 + (x+h)\gamma_w = p_b \quad (1)$$

$$p_2 + x\gamma_w + h\gamma_{hg} = p_c = p_b$$

onde x é uma distância não especificada e $\gamma = \rho g$ (peso específico). Subtraindo (1b) de (1a)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h(\gamma_{hg} - \gamma_w) - \gamma_w L \text{sen} 45 \quad (2)$$

logo

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 0.15 \times 9.81 \times (13280 - 1000) - 9.81 \times 1000 \times 1.5 \times 0.707 = 7,667 \text{ kPa Resp.}$$

b) A queda de pressão devido ao atrito viscoso é obtida da equação da energia entre 1 e 2

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad (3)$$

Resolvendo para h_f ($= \Delta p_f / \rho_w g$) e tendo em vista que $V_1 = V_2$ e a Eq. (2)

$$\Delta p_f = \gamma_w h_f = (p_1 - p_2) + \gamma_w (z_1 - z_2) = \Delta p + \gamma_w L \text{sen} 45 = h(\gamma_{hg} - \gamma_w)$$

ou

$$\Delta p_f = 7667 + 9,81 \times 1000 \times 1,5 \times 0,707 = 18,07 \text{ kPa Resp.}$$

2.2 Relações Integrais para um Volume de Controle

Vimos no §1.3 que podemos analisar problemas em mecânica sob o ponto de vista de *Lagrange* ou de *Euler* e que, em mecânica dos fluidos, o último se mostra mais adequado na maioria dos casos práticos.

Na análise euleriana podemos concentrar o estudo do comportamento do escoamento tanto para pontos quanto para certos volumes fixos. A análise do escoamento em pontos específicos conduz à transformação das leis básicas do movimento em um sistema de equações diferenciais. Por outro lado, a análise de um volume fixo conduz a um sistema de equações integrais. Conhecidas as equações integrais as equações diferenciais correspondentes podem ser facilmente obtidas, e vice-versa.

No momento vamos nos concentrar em escrever as equações integrais para a análise euleriana. A escolha do volume de controle, em detrimento da análise pontual, baseia-se no grande apelo do primeiro, sobretudo quando consideramos a intuição física dos fenômenos em estudo.

2.2.1 As Leis de Conservação – Sistemas e Volumes de Controle

*Sistema*⁵ é aqui definido como sendo *uma quantidade fixa de matéria*. Em outras palavras, um *sistema* representa uma certa quantidade de substância composta das mesmas moléculas, não importando como estas se movimentam no espaço.

As leis da mecânica clássica são escritas para um *sistema*; isto é, para uma quantidade arbitrária de massa, com identidade fixa. Tudo externo ao sistema é denominado seu *exterior*, ou, *ambiente externo*. Um sistema é separado do seu exterior pelo seu *contorno*.

Dentre as leis da mecânica que necessitamos para resolver problemas envolvendo a transferência de energia por fluidos destacam-se as *Leis de Conservação*. Cinco delas representam a conservação de: 1- Massa; 2- Quantidade de movimento linear; 3- Energia; 4- Quantidade de movimento angular; 5- Variação de entropia.

Neste capítulo veremos como tratar as três primeiras aplicadas para *Volumes de Controle*.

Relembremos inicialmente a forma dessas leis para um sistema. Primeiro, sendo um sistema uma quantidade fixa de matéria, a lei de conservação de massa simplesmente estabelece que a massa (do sistema) não varia com o tempo, i.e.

$$m_{sys} = \text{constante} \quad (2.2.1)$$

ou

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = 0 \quad (2.2.2)$$

Isto nos parece tão óbvio, sobretudo na mecânica dos sólidos, que com frequência não damos a devida atenção à mesma. Veremos que em mecânica dos fluidos devemos analisar cada situação com cuidado de forma a garantir a identidade mostrada em (2.2.2). Esta equação é também conhecida como *equação da continuidade* (assim denominado por admitir que o fluido mantém-se contínuo e não se dispersa ao se deslocar). Segundo, se o exterior exerce uma força **F** sobre o sistema, a segunda lei de Newton estabelece uma relação entre força e a variação da quantidade de movimento linear (do sistema)

⁵ É comum em termodinâmica definir sistemas em algumas categorias. Um *sistema isolado* é um que não troca massa nem energia com seu ambiente externo. Um *sistema fechado* pode trocar somente energia, enquanto um *sistema aberto* troca qualquer um dos dois, massa e/ou energia. Portanto, na nossa definição, *sistema* é o que se define classicamente como *sistema fechado*.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})_{sys}}{dt} = \frac{D}{dt}_{sys} \int \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (2.2.3)$$

Observe que esta é uma equação vetorial, que implica a existência de até três componentes, ou três equações escalares, $F_x=ma_x$, $F_y=ma_y$ e $F_z=ma_z$.

Terceiro, se calor δQ é adicionado ao sistema do exterior, e trabalho δW é realizado pelo sistema para o exterior, a energia total do sistema dE deve variar de acordo com a primeira lei da termodinâmica ⁶ (válida para a mecânica clássica, não-relativista, quando a massa do sistema não varia com a variação da energia)

$$d\dot{E} = \delta\dot{Q} - \delta\dot{W} \quad (2.2.4)$$

onde o ponto sobre as letras representam taxa de variação temporal de cada uma das propriedades. Como vimos no § 1.4.1, a energia do sistema pode ser composta de vários termos, usualmente da energia interna (molecular), energia cinética e energia potencial gravitacional, Fig. 2.2.1,

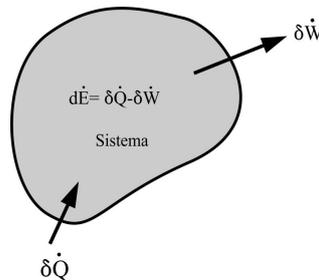


Figura 2.2.1 Primeira lei da termodinâmica aplicada para um sistema.

Todas essas leis envolvem propriedades termodinâmicas, devendo ser acrescentadas de relações de estado do tipo $p= p(\rho,T)$, $e= e(\rho,T)$, ou outras, como, por exemplo, a

⁶ A nomenclatura sugerida para as diferenciais de calor e trabalho, $\delta\dot{Q}$ e $\delta\dot{W}$, enfatiza que essas não são diferenciais exatas; i.e., não existem variáveis Q e W que sejam funções exclusivas de duas variáveis de estado independentes. Ou seja, enquanto a energia E é uma propriedade termodinâmica (depende exclusivamente do valor de variáveis independentes, como pressão e temperatura em pontos arbitrários), Q e W dependem da trajetória de calor e trabalho transferidos para o sistema durante o processo de passagem de um estado 1 para o estado 2. Ou seja, enquanto a integral da diferença $(\delta Q - \delta W)$ não depende do processo entre 1 e 2 e somente dos valores nos estados 1 e 2, a integral das duas variáveis (individualmente) entre 1 e 2 só pode ser feita conhecendo-se os processos (trajetórias) termodinâmicos em que calor e trabalho percorrem indo de 1 para 2.

equação para gases (ideais ou não).

As equações acima podem ser aplicadas tanto para sistemas sólidos quanto fluidos. Elas são ideais para mecânica dos sólidos, onde acompanhamos o mesmo sistema sempre. Por exemplo, acompanhamos uma viga quando esta deflete sob a ação de uma carga, ou um pêndulo, enquanto este oscila ⁷.

Sistemas fluidos não requerem em geral esta atenção específica. É rara a situação em que precisamos seguir continuamente uma partícula de fluido. Em geral queremos saber o efeito que o movimento do fluido causa sobre o ambiente em que este se encontra, ou sobre o objeto sobre o qual atua. Nos exemplos que acabamos de mencionar queremos saber, por exemplo, o efeito do vento sobre a viga, ou do arraste do ar sobre o pêndulo.

Isto requer que as leis fundamentais sejam escritas para uma certa região nas vizinhanças do objeto ou equipamento em estudo. Este ponto de vista do analista (ou projetista) sugere a necessidade para uma análise para um volume de controle.

Consideremos por um momento dois sistemas conforme esquematizado na Fig 2.2.2a. Ao analisá-los devemos aplicar as leis de conservação (massa, quantidade de movimento, energia etc.) e considerar as suas interações com as respectivas regiões externas. Uma vez que sistemas fluidos deformam-se e interagem entre si continuamente, isto significa que as leis de conservação devem ser escritas na forma diferencial e resolvidas analítica, ou numericamente, para obtermos os respectivos campos do escoamento (velocidade, pressão, temperatura etc.). Concluimos então que a análise de sistemas em mecânica dos fluidos é intrinsecamente uma análise diferencial.

Em contraste, imaginemos que o volume de controle mostrado na Fig.2.2.2b contém parte dos dois sistemas anteriores num determinado instante. Um momento mais tarde os dois já passaram e outros já se encontram nas vizinhanças. As leis básicas de conservação

⁷ Um fato interessante a ser lembrado é que Aristóteles (384-322 AC) é considerado por alguns como pai do princípio da continuidade, no sentido de que massa é indestrutível. Foi o primeiro a formular que “O contínuo pode ser definido como aquilo que é divisível em partes que, em si mesmo, é divisível ao infinito, assim como um corpo é divisível em toda forma. A magnitude divisível em uma direção é uma linha, em três direções é um corpo. Sendo divisível em três direções um corpo é divisível em todas as direções. E magnitudes que são divisíveis desta forma são contínuos”. Aristóteles acreditava que a teoria dos quatro elementos (terra, água, ar e fogo) era verdadeira e que os elementos nada mais eram do que a combinação de diferentes propriedades da mesma coisa, a *materia*. Na mesma época tratou de um dos marcos da história e da filosofia natural: a *lei da inércia*. Foi antecessor de Galileu Galilei (1564-1642), Christiaan Huyghens (1629-1695) e Isaac Newton (1642-1727) sobre a lei da inércia. Newton foi, de fato, somente o quarto a tratar da lei de inércia que hoje tão bem conhecemos.

podem ser escritas para determinar os efeitos do escoamento sobre a região denominada *volume de controle*. Tudo que necessitamos saber é conhecer o campo do escoamento nesta região; as do escoamento fora da região são consideradas irrelevantes para a análise.

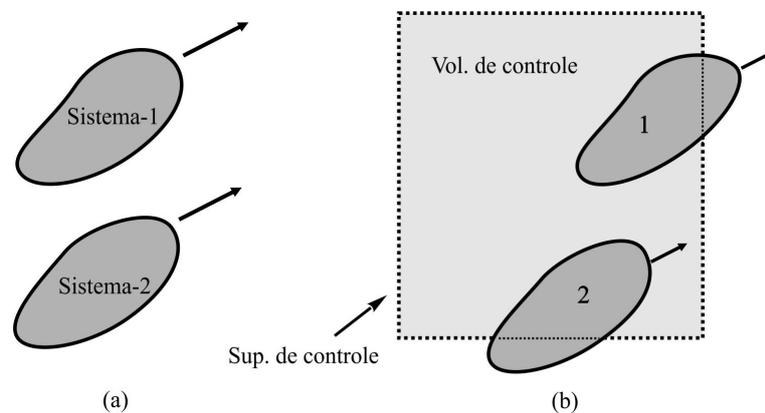


Figura 2.2.2 Sistema e volume de controle: a) dois sistemas isolados; b) dois sistemas passando por um volume de controle.

2.2.2 O Teorema de Transporte de Reynolds

Para converter uma análise de sistema para volume de controle temos que aplicar as equações de conservação para uma região e não para partículas individuais de massa. Este procedimento pode ser obtido utilizando o teorema de transporte de Reynolds. A metodologia consiste em relacionar a derivada temporal da propriedade de um sistema com a taxa de variação temporal da propriedade dentro de certa região. A fórmula de conversão difere ligeiramente, dependendo se o volume de controle é fixo, deformável ou se encontra em movimento.

A Fig. 2.2.3 ilustra as três situações. O volume de controle fixo, mostrado na Fig. 2.2.3a, envolve uma região estacionária de um bocal. Lembre-se que a superfície de controle é um conceito abstrato que não intercepta o escoamento de forma alguma. No caso particular, o volume de controle expõe as tensões nos parafusos do flange que contribui para as forças atuando sobre o sistema. Neste sentido o volume de controle lembra o conceito de diagrama de corpo-livre, tão aplicado na análise de sistemas em mecânica dos sólidos.

A Fig. 2.2.3.b ilustra um volume de controle em movimento. Aqui o paraquedas é o objeto de interesse, não o ar, de forma que a superfície de controle acompanha o paraquedas na mesma velocidade deste. Se a velocidade for constante o movimento

relativo tem o padrão de regime permanente, o que simplifica o estudo. No caso contrário, o movimento relativo é não-permanente (transiente) e os resultados são dependentes do tempo, requerendo análise especial, principalmente no caso da aplicação da segunda lei de Newton, válida somente para sistemas de coordenadas inerciais.

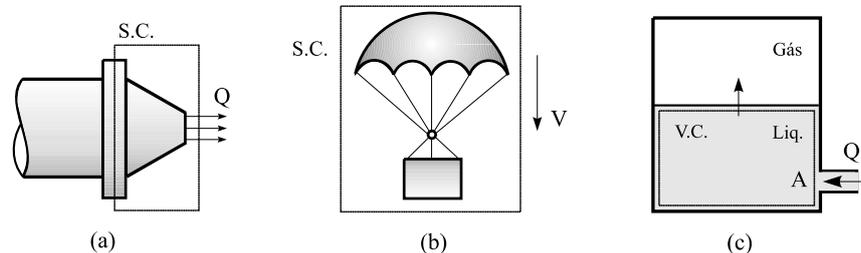


Figura 2.2.3 Volumes de controle: a) fixo - análise de tensões num bocal; b) em movimento - análise de forças de arraste; c) deformável - análise de variação de pressão dentro de um tanque.

Por último, a Fig. 2.2.3.c mostra um volume de controle deformável. Movimentos relativos nos contornos tornam-se relevantes e a taxa de variação do volume tem que ser considerada na análise.

O procedimento de relacionar a derivada temporal da propriedade de um sistema com a taxa de variação da propriedade no volume de controle é relativamente simples e direto. Para tanto, um volume é escolhido enquanto no instante $t = t_0$ um sistema deslocando-se no espaço é admitido coincidir com o volume de controle. Referindo-se à Fig. 2.2.2.c, o sistema poderia ser a massa de líquido ocupando o volume indicado abaixo do gás. Evidentemente, no instante $t = t_0$, a quantidade de massa, energia, quantidade de movimento etc., dentro do volume escolhido, é exatamente a mesma daquela no sistema. Devido ao movimento, e possível deformação deste, assim como do fluxo pela superfície de controle (ponto-A), a massa no volume pode variar. Desta forma, ocorre uma variação temporal das propriedades dentro do volume de controle. Como mencionado, o teorema de transporte de Reynolds estabelece relações entre as taxas de variação de propriedades dentro do volume de controle com as taxas de variação das mesmas propriedades para um sistema.

Na sua forma mais geral o *Teorema de Reynolds* para um volume de controle em movimento e deformável estabelece:

Seja β uma propriedade intensiva⁸ qualquer do fluido — definida por unidade-de-massa (v.g., energia cinética por unidade de massa, entalpia específica, quantidade de movimento por unidade de massa etc). Então

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \beta \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{vc} \beta \rho dV + \int_{sc} \beta \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.5)$$

onde

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_s \quad (2.2.6)$$

As variáveis são assim definidas: ρ = massa específica, \forall = volume, \mathbf{V}_r = velocidade do fluido relativa à superfície de controle, \mathbf{V} = velocidade do fluido, \mathbf{V}_s = velocidade da superfície de controle, sys= sistema, vc= volume de controle, sc= superfície de controle. Destaque-se ainda que as velocidades indicadas são vetores, referidos a um sistema de coordenadas fixo no espaço.

Esta equação pode ainda ser reescrita para duas situações particulares: i) volume de controle fixo; ii) volume de controle móvel, não-deformável.

2.2.2.a Volume de Controle Fixo

Se o volume de controle é fixo no espaço ($\mathbf{V}_s = 0$), o teorema de Reynolds assume a forma simplificada

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \beta \rho dV = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \int_{sc} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.7)$$

2.2.2.b Volume de Controle Móvel, Não-Deformável

Se o volume de controle desloca-se com velocidade constante \mathbf{V}_s , como na Fig. 2.2.2b, um observador fixo no volume verá uma velocidade relativa \mathbf{V}_r de fluido cruzando a superfície

⁸ Em termodinâmica, uma propriedade *intensiva* é uma que não depende do tamanho do sistema, ou da quantidade de massa do sistema. Por outro lado, uma propriedade *extensiva* é proporcional à quantidade de massa do sistema. Por exemplo, massa específica é uma propriedade intensiva assim como pressão e temperatura, simplesmente por não dependerem da quantidade da substância. Massa e volume são claramente propriedades extensivas.

de controle, conforme definido na Eq. (2.2.6). Nesta situação os termos de fluxo serão proporcionais à velocidade relativa V_r , mas a integral volumétrica não mudará porque o volume de controle desloca-se com uma forma fixa, sem se deformar. O teorema de Reynolds para este caso torna-se

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \beta \rho dV = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \int_{sc} \beta \rho (V_r \cdot dA) \quad (2.2.8)$$

2.2.3 Aproximação para Escoamento Unidimensional

Em muitas aplicações o escoamento cruza a fronteira da superfície de controle somente em alguns pontos específicos de entrada e saída de fluido que podem ser aproximados por um escoamento unidimensional. Isto é, as propriedades do escoamento são admitidas aproximadamente uniformes nas seções transversais de entrada e saída. Nesses casos as integrais de superfície nas Eqs.(2.2.5-2.2.8) podem ser substituídas por simples somatórios considerados como positivos para os fluxos saindo do volume de controle e negativos para aqueles entrando no volume de controle. Para o caso mais geral, Eq. (2.2.5), obtém-se a equação

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \beta \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{vc} \beta \rho dV + \sum_{out} \beta \rho V_r A - \sum_{in} \beta \rho V_r A \quad (2.2.9)$$

onde os índices *out* e *in* referem-se às saídas e entradas, respectivamente.

2.2.4 Conservação de Massa

Uma vez estabelecida a equação geral de conversão de sistema para volume de controle, a aplicação para as diversas equações de conservação é simples e direta.

Para a conservação de massa o coeficiente β é simplesmente 1, uma vez que $\beta = dm/dm = 1$. Logo, para um volume de controle deformável, e em movimento

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho (V_r \cdot dA) = 0 \quad (2.2.10)$$

Para um volume fixo

$$\int_{vc} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{sc} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) = 0 \quad (2.2.11)$$

Se o volume tem um número finito de entradas e saídas, da Eq. (2.2.9) podemos escrever

$$\int_{vc} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_{out} \rho VA - \sum_{in} \rho VA = 0 \quad (2.2.12)$$

No caso de regime permanente (invariável com o tempo)

$$\sum_{out} \rho Q - \sum_{in} \rho Q = 0 \quad (2.2.13)$$

Esta equação garante que, em regime permanente, o fluxo de massa entrando no volume de controle é igual ao fluxo de massa saindo. Finalmente, se o fluido puder ser considerado incompressível ($\rho = \text{constante}$)

$$\sum_{out} VA - \sum_{in} VA = \sum Q_{out} - \sum Q_{in} = 0 \quad (2.2.14)$$

Observemos que para um escoamento incompressível (ou quase isso) a equação de conservação de massa, (2.2.11), permite que seja definido a vazão volumétrica atravessando a saída da superfície de contorno

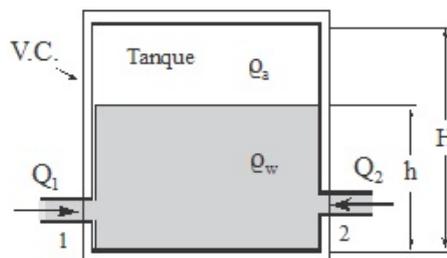
$$Q_{out} = \int_{out} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.15)$$

Desta equação definimos a velocidade média V_m que, quando multiplicada pela área da seção transversal A , resulta na vazão volumétrica

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.16)$$

As relações para balanço de massa, Eq. (2.2.10) ou (2.2.11), são fundamentais para *todos* os estudos de escoamento de fluido. Elas envolvem somente a velocidade e a massa específica. Direções dos vetores não são relevantes, exceto para o cálculo dos fluxos pelas superfícies de contorno. Embora análises particulares possam estar preocupadas com forças, momentos ou energia, deve-se certificar que o balanço de massa faz parte da análise também, caso contrário, os resultados, muito provavelmente, não terão sentido.

Exemplo 2.2.1 Um tanque está sendo alimentado por água por duas entradas conforme mostrado na figura. Ar é mantido comprimido na parte superior do tanque e a altura da água é h num determinado instante. Encontrar a expressão para a variação do nível d'água com o tempo, dh/dt . Calcule dh/dt se: $D_1=30$ mm, $D_2=75$ mm, $V_1=1$ m/s, $V_2=1,5$ m/s e $A_t=0,20$ m².



Solução: a) Um volume de controle está indicado na figura. O escoamento é transiente, logo, a Eq. (2.2.10) se aplica

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV - (\rho A V)_1 - (\rho A V)_2 = 0 \quad (1)$$

Por outro lado, a variação de massa no volume de controle é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w A_t h) + \frac{\partial}{\partial t} [\rho_a A_t (H-h)] = \rho_w A_t \frac{dh}{dt} \quad (2)$$

O termo em ρ_a anula-se porque representa a taxa de variação de massa de ar, que é zero, uma vez que este mantém-se retido no topo do tanque. Levando (2) em (1)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2}{\rho_w A_t} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_t} \quad (3)$$

b) Substituindo os valores numéricos obtém-se $dh/dt=0,0367$ m/s.

2.2.5 Conservação de Quantidade de Movimento Linear

Na segunda lei de Newton a propriedade diferenciada é a quantidade de movimento $\mathbf{p}=m\mathbf{V}$. Portanto, $\beta = \mathbf{p}/m = m\mathbf{V}/m = \mathbf{V}$. Aplicando a segunda lei para um volume de controle deformável

$$\sum \mathbf{F} = \frac{D}{dt} \int_{sys} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} + \int_{sc} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.17)$$

Os seguintes pontos referidos à esta equação devem ser destacados:

- O termo \mathbf{V} representa a velocidade do fluido relativo a um sistema de coordenadas fixo (*não-acelerado*); caso contrário, a lei de Newton deve ser modificada para incluir termos devidos à aceleração relativa, não-inerciais;

- O termo $\sum \mathbf{F}$ representa o vetor somatório de *todas* as forças atuando sobre o sistema ocupando o volume de controle no instante- t ; i.e. inclui forças de superfície atuando sobre o fluido e sólidos cortados pela superfície de controle, mais as forças de corpo (gravitacionais, eletromagnéticas etc.) atuando sobre a massa, dentro do volume de controle;

- A equação é uma relação vetorial; as duas integrais são vetoriais devido à presença do termo \mathbf{V} nos integrandos. Portanto, a equação tem três componentes

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \frac{d}{dt} \int_{vc} u \rho d\mathcal{V} + \int_{sc} u \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) \\ \sum F_y &= \frac{d}{dt} \int_{vc} v \rho d\mathcal{V} + \int_{sc} v \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) \\ \sum F_z &= \frac{d}{dt} \int_{vc} w \rho d\mathcal{V} + \int_{sc} w \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Para um volume de controle fixo

$$\sum \mathbf{F} = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \rho) d\mathcal{V} + \int_{sc} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.2.19)$$

O termo referido à integral de superfície nesta equação é denominado *fluxo de quantidade de movimento*. Se a condição na seção transversal puder ser considerada

unidimensionais ρ e V são uniformes na seção e o resultado da integração torna-se

$$G_i = (\rho VA)_i V_i = m_i V_i \quad (2.2.20)$$

Se o volume de controle tem somente entradas e saídas unidimensionais a Eq. (2.2.19) reduz-se a

$$\sum \mathbf{F} = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V}\rho) dV + \sum_{out} (\dot{m} \mathbf{V}) - \sum_{in} (\dot{m} \mathbf{V}) \quad (2.2.21)$$

É importante enfatizar que estamos lidando com uma relação vetorial. A Eq. (2.2.21) estabelece que o somatório das forças atuando *sobre* um volume de controle fixo é igual à taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle mais a soma vetorial dos fluxos de quantidade de movimento saindo, menos a soma vetorial dos fluxos entrando.

Se o regime for permanente os fluxos de massa na entrada e saída são iguais, Eq. (2.2.13), e a equação de balanço de força e quantidade de movimento reduz-se a

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m} (\mathbf{V}_{out} - \mathbf{V}_{in}) \quad (2.2.22)$$

Exemplo 2.2.2 Água é transportada por um duto apresentando uma curva conforme esquematizado na Fig. 2.2.3. Determinar o valor da força da água atuando sobre a curva sabendo que esta encontra-se no plano vertical. Calcular os dois componentes da força, assim como a direção e o ponto de atuação da resultante. Dados: $D_1=6$ ft, $D_2=4$ ft, $Q=8,495$ m³/s, $\rho_w=1000$ kg/m³, $W=8170$ kgf, $p_1=40$ psi, $\delta z=3,1$ m, $\delta x=1,8$ m, $\theta_2=120^\circ$, para um coeficiente de perda de carga na curva igual a $K_c=0,50$.

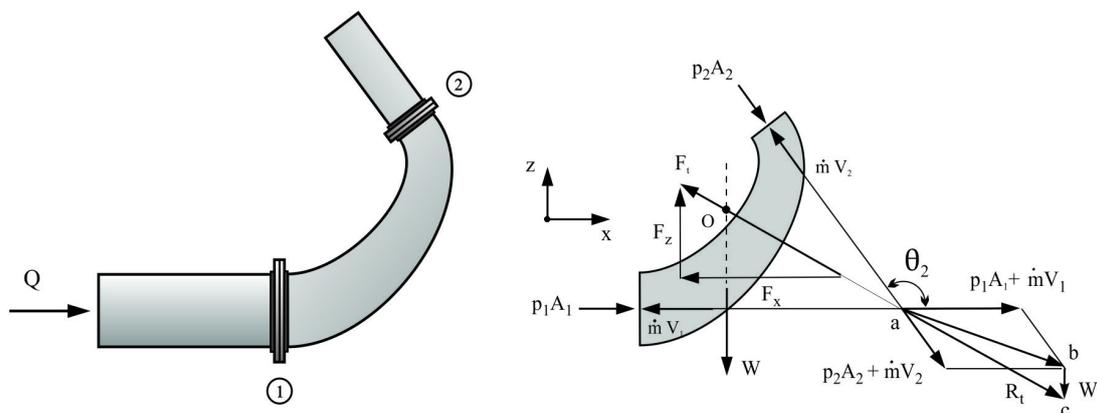


Figura 2.2.4 Escoamento por uma curva no plano vertical

Solução: Escolhemos um volume de controle que coincide com o volume interno da curva conforme mostrado na Fig. 2.2.4.

a) Transformação de unidades: $D_1 = 6 \times 0,3048 = 1,8288 \text{ m}$; $D_2 = 4 \times 0,3048 = 1,2102 \text{ m}$; $A_1 = 2,62677 \text{ m}^2$, $A_2 = 1,15028 \text{ m}^2$, $p_1 = 40 \times 6894,76 = 275,79 \text{ kPa}$.

b) As velocidades nas seções de entrada e saída da curva são, respectivamente: $V_1 = Q/A_1 = 8,495/2,6267 = 3,234 \text{ m/s}$, $V_2 = 8,495/1,1503 = 7,385 \text{ m/s}$; enquanto o fluxo de massa é $m = \rho_w Q = 8495 \text{ kg/s}$.

c) A partir da equação de energia (veremos a seguir, Cap. 4)

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + K_c \frac{V_2^2}{2} \quad (1)$$

$$\therefore p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} - (1 + K_c) \frac{\rho V_2^2}{2} - \rho g \delta z = 207,18 \text{ kPa}$$

d) Os dois componentes da resultante da força atuando sobre o fluido (F_x e F_z), no volume de controle são obtidas a partir das respectivas equações. $\theta_1 = 180$ e $\theta_2 = 120$ são os ângulos dos vetores relativos às áreas nos pontos 1 e 2 com a horizontal. Note que a força devido à pressão é $\mathbf{F}_p = -p\mathbf{A}$ (Eq. 1.4.3), assim

$$F_x - p_1 A_1 \cos \theta_1 - p_2 A_2 \cos \theta_2 = \dot{m} V_1 \cos \theta_1 + \dot{m} V_2 \cos \theta_2 \quad (2)$$

$$F_z - W - p_2 A_2 \sin \theta_2 = +\dot{m} V_2 \sin \theta_2$$

portanto

$$F_x = (p_1 A_1 + \dot{m} V_1) \cos \theta_1 + (p_2 A_2 + \dot{m} V_2) \cos \theta_2 \quad (3)$$

$$F_z = W + (p_2 A_2 + \dot{m} V_2) \sin \theta_2$$

ou, para os valores numéricos, e lembrando que $\cos \theta_1 = \cos 180 = -1$ e $\cos \theta_2 = \cos 120 = -0,50$

$$F_x = (275800 \times 2,62677 + 8495 \times 3,234) \times (-1) + (207180 \times 1,15028 + 8495 \times 7,385) \times (-0,50)$$

$$= -902,44 \text{ kN} \quad (-92.023 \text{ kgf})$$

$$F_z = 8170 \times 9,80665 + (207180 \times 1,15028 + 8495 \times 7,385) \times (0,866) \quad (4)$$

$$= 340,83 \text{ kN} \quad (34.755 \text{ kgf})$$

$$\therefore F_t = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 964,65 \text{ kN} \quad (98.367 \text{ kgf})$$

A Fig. 2.2.4 mostra o procedimento gráfico para se determinar a direção e o ponto de atuação da força resultante. Sobre o duto atuam forças iguais e de sinais contrários àquelas indicadas nas Eqs. (4).

Exemplo 2.2.3 Gás natural é transportado por um duto que apresenta uma curva no interior de um prédio conforme esquematizado na Fig. 2.2.5. Nos pontos A e B são instaladas juntas de expansão para compensar expansões térmicas. Determine o valor da força e do momento angular atuando sobre a curva sabendo que esta encontra-se no plano horizontal. Dados: Composição do gás natural: 88% metano, 8% etano e 4% C₃⁺ (massas moleculares iguais a 16,04, 30,07 e 44,0, respectivamente), D= NPS 16 , Q= 1,6562 m³/s, p_A= 875 psi, T= 18 °C, L_x= 7,5 m e L_y= 9,7 m.

Solução: a) Como primeira aproximação admitiremos que o gás tenha comportamento ideal. A massa molecular do gás é $M_g = \sum x_i M_i = 0,88 \times 16,04 + 0,08 \times 30,07 + 0,04 \times 44,0 = 18,28$. Portanto, a massa específica é

$$\rho = \frac{M_g p}{R^* T} = \frac{18,28 \times (875 + 14,7) \times 6894,7}{8314,5 \times (273,2 + 18)} = 46,31 \text{ kg/m}^3 \quad (1)$$

b) Para o sistema de coordenadas adotado, da geometria e das equações de continuidade e de conservação de quantidade de movimento: $A_A = A_B$, $p_B = p_A$, $m_A = m_B$, $V_A = V_B$, logo

$$F_y + p_A A_A - p_B A_B = -\dot{m} V_A + \dot{m} V_B \quad (2)$$

$$F_x + 0 + 0 = 0 + 0$$

ou

$$R_y = -F_y = (p_A A_A + \dot{m} V_A) - (p_B A_B + \dot{m} V_B) = 0 \quad (3)$$

$$R_x = -F_x = 0$$

Ou seja, a resultante das forças atuando na direção-y (ignorando efeitos de atrito etc.) é também nula.

c) Observemos da figura que sobre as seções A e B atuam forças resultantes da pressão e do fluxo de quantidade de movimento passando por essas seções

$$F_A = -F_B = p_A A_A + \dot{m} V_A = p_B A_B + \dot{m} V_B = 751134 \text{ N} = 75570 \text{ kgf} \quad (4)$$

Esta é a força atuando sobre cada um dos flanges A e B. O torque sobre a estrutura será

$$T_z = F_A \times L_x = 751134 \times 7,5 = 5.633.505 \text{ N-m} \quad (574.457 \text{ kgf-m}) \quad (6)$$

Logo, apesar da resultante sobre o sistema ser nula há um carregamento bastante alto sobre cada uma das juntas. Esse esforço deve ser considerado no projeto da instalação sob o risco de sub-dimensionar a ancoragem (ou flanges) deste segmento do duto.

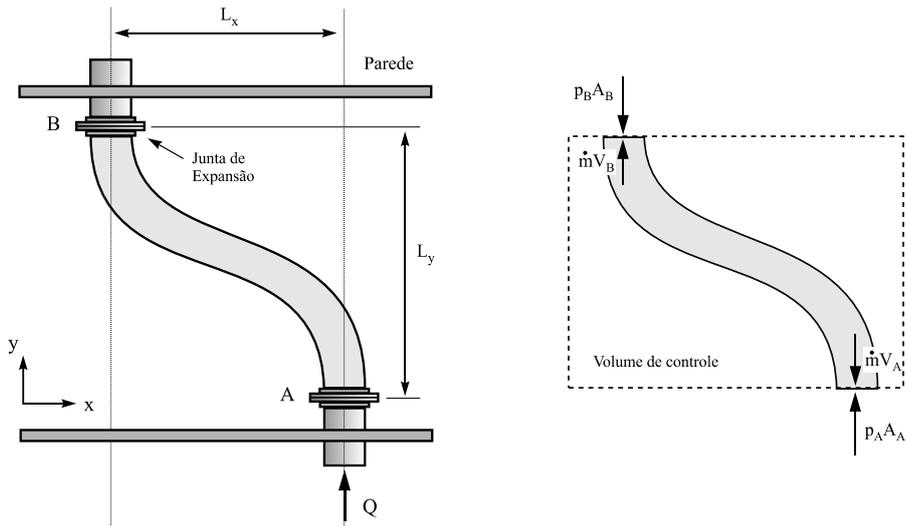


Figura 2.2.5 Escoamento de gás por uma curva no plano horizontal

2.3 As Equações de Euler e Bernoulli

Em 1757 Leonhard Euler aplicou pela primeira vez as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento (segunda lei de Newton) para “partículas de fluido” (um conceito então criado por ele) em movimento, iniciando assim a formulação analítica da dinâmica dos fluidos, associando conceitos da física e da matemática ⁹.

Uma relação entre pressão, velocidade e elevação pode ser obtida para escoamento sem atrito viscoso (viscosidade nula) por um tubo de corrente infinitesimal, conforme mostrado na Fig. 2.3.1. Todas as propriedades ρ , V , p e A mudam gradualmente na direção- s ao longo do tubo de corrente.

Para um pequeno volume de controle a equação de conservação de massa pode ser escrita como

$$\frac{\partial(\rho A ds)}{\partial t} + d(\rho A V) = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds + d(\rho A V) = 0 \quad (2.3.1)$$

⁹ Euler, Leonhard. "Principes généraux du mouvement des fluides". Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. 11: 274–315, (1757).

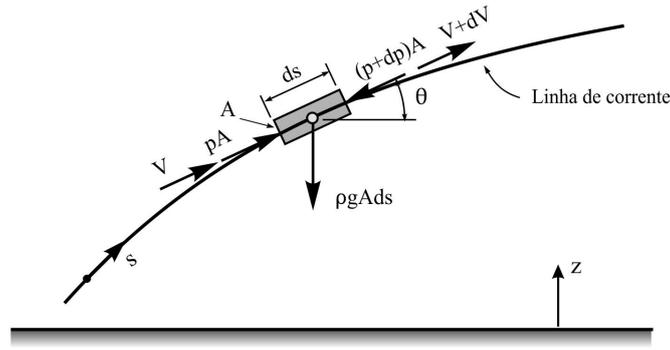


Figura 2.3.1 A equação de Euler para um tubo de corrente.

Por outro lado, a equação de conservação de quantidade de movimento aplicada no volume de controle é

$$\sum F_s = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho V d\Psi + \int_{sc} V d(\rho VA) \quad \therefore \quad \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho V d\Psi + \int_{sc} V d\dot{m} \quad (2.3.2)$$

onde $\dot{m} = \rho VA$. Por hipótese, as únicas forças atuantes são de pressão e gravidade. O termo de gravidade é devido ao peso do elemento do tubo é

$$dF_{s-grav} = -dW \sin\theta \approx -\rho g A ds \sin\theta \approx -\rho g A dz \quad (2.3.3)$$

enquanto a resultante devido à pressão é

$$dF_{s-prs} = -A dp \quad (2.3.4)$$

As integrais dos dois termos na Eq. (2.3.2) para o volume elementar tornam-se

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho V d\Psi \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) A ds \quad \text{onde} \quad d\Psi = A ds \quad (2.3.5)$$

$$\int_{sc} V d\dot{m} \approx [(V+dV)(\dot{m}+d\dot{m})]_{out} - [V\dot{m}]_{in} \approx \dot{m} dV + V d\dot{m}$$

Após algumas operações, a combinação dessas equações obtém-se a *equação de Euler para regime não-permanente, não-viscoso, ao longo de uma linha de corrente*

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + VdV + g dz = 0 \quad (2.3.6)$$

A Equação de Bernoulli

Integrando esta equação entre dois pontos arbitrários ao longo da linha de corrente

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (2.3.7)$$

para regime permanente incompressível (massa específica constante) chega-se à *equação de Bernoulli* (de fato nada mais do que a integral proposta por Lagrange da equação de Euler, 2.3.6)

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \text{const} \quad (2.3.8)$$

O resultado indica que a soma das energias de pressão (mais adequadamente, “trabalho de fluxo”), cinética e potencial, por unidade de massa, permanece constante ao longo de uma linha de corrente num *escoamento incompressível não-viscoso*. É válida para todos os pontos ao longo de uma mesma linha de corrente, não podendo ser aplicada para linhas de corrente distintas. A equação não é válida em regiões onde trabalho e calor ocorrem, quando a constante de Bernoulli varia no escoamento. A razão básica para a restrição é que trabalho e calor estão associados ao atrito no fluido, condição que admitimos não existir na dedução da equação. Isto se tornará claro mais adiante quando escrevermos a equação para a energia (primeira lei da termodinâmica) no mesmo volume de controle e compararmos o resultado com a equação de Bernoulli. No caso particular de escoamento permanente ao longo de um tubo de corrente com trabalho mecânico e atrito a *equação para a energia* assume a forma

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + W_s + W_f - Q_o^{12} \quad (2.3.9)$$

Aqui todos os termos representam energia por unidade de massa (J/Kg): W_s é o trabalho por unidade de massa realizado pelo fluido (positivo para uma turbina, negativo para uma bomba ou compressor), W_f é a perda de energia por unidade de massa devido ao atrito (irreversível) e Q_o^{12} a troca de calor reversível com o exterior entre os pontos 1 e 2.

Conforme veremos a seguir, a equação de Bernoulli é mais restritiva do que a equação de energia uma vez que esta contém somente os termos “mecânicos” para os trabalhos devidos à pressão, energia cinética e energia potencial que aparecem a partir da relação para a quantidade de movimento linear, sem atrito e troca de calor.

2.3.1 Linha Piezométrica e Linha de Energia

Uma interpretação gráfica para a equação de energia pode ser muito útil na análise dos diversos termos que a compõem. Para tanto dividimos a Eq. (2.3.9) por g ; todos os termos passam a representar “alturas”, ou energia por unidade de peso (não de massa) [$J/kg \cdot m/s^2 = N \cdot m/kg \cdot m/s^2 = m$]. A equação assume então a forma, Eq. (2.4.23),

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_s + h_f - h_o^{12} \quad (2.3.10)$$

onde $h_s = W_s/g$, $h_f = W_f/g$ e $h_o^{12} = q_o^{12}/g$ representam a altura correspondente ao trabalho realizado pelo fluido, a perda devido ao atrito e a troca de calor reversível com o exterior entre 1 e 2.

A linha de energia (LE) representa a altura da energia total, ou da constante de Bernoulli $h_o = z + p/\rho g + V^2/2g$. Para escoamento não-viscoso, sem trabalho e transferência de calor, a LE mantém uma altura constante. A *linha piezométrica* (LP), também denominado *gradiente hidráulico*, representa a altura correspondente à elevação local mais a altura de pressão $z + p/\rho g$, isto é, a linha de energia menos a altura de velocidade $V^2/2g$ (energia cinética). A linha piezométrica é altura que o fluido subiria num piezômetro conectado ao escoamento.

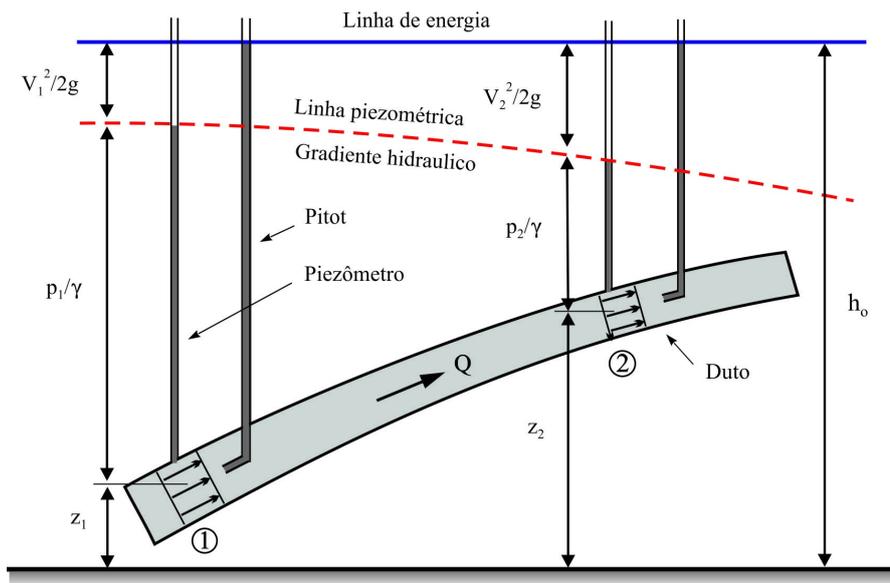


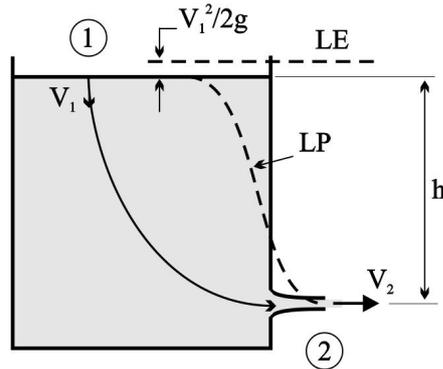
Figura 2.3.2 Linhas de energia e piezométrica para escoamento não viscoso num duto.

A Fig. 2.3.2 ilustra a LE e a LP para um *escoamento sem atrito* entre dois pontos 1 e 2 num duto. Os tubos piezométricos medem a altura de pressão estática $z + p/\rho g$; ou seja, a LP. Os tubos de pitot medem as alturas de pressão correspondentes às velocidades de estagnação $h_o = z + p/\rho g + V^2/2g$, que corresponde à LE. Neste exemplo a LE é mantida constante e a LP decresce devido ao aumento na velocidade.

No caso de escoamento de um fluido real (com viscosidade) a LE tende a cair gradativamente devido às perdas por atrito, caindo abruptamente em cada uma das perdas localizadas (válvulas, obstruções etc.), ou devido ao trabalho extraído, como por uma turbina. A LE só subirá se ocorrer adição de trabalho ao sistema, como no caso de bombas e compressores. Em geral a LP segue o comportamento da LE com respeito às perdas e adições de trabalho, subindo ou descendo, se a velocidade decresce ou aumenta, respectivamente.

É prática rotineira em problemas envolvendo a equação de Bernoulli utilizar o ponto-1 a montante e 2 a jusante do escoamento.

Exemplo 2.3.1 Determinar a relação entre a velocidade de descarga V_2 e a altura da superfície livre do tanque conforme mostrado na figura. Admitir escoamento não-viscoso, incompressível.



Solução: Iniciamos escrevemos a equação para conservação de massa. Como o fluido é incompressível: $A_1 V_1 = A_2 V_2$. Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2, e tendo em vista ainda que as pressões nesses pontos são iguais (atmosférica)

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gh \quad (1)$$

Eliminando V_1 a partir da equação da continuidade ($V_1 A_1 = V_2 A_2$)

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - A_2^2/A_1^2}} \quad (2)$$

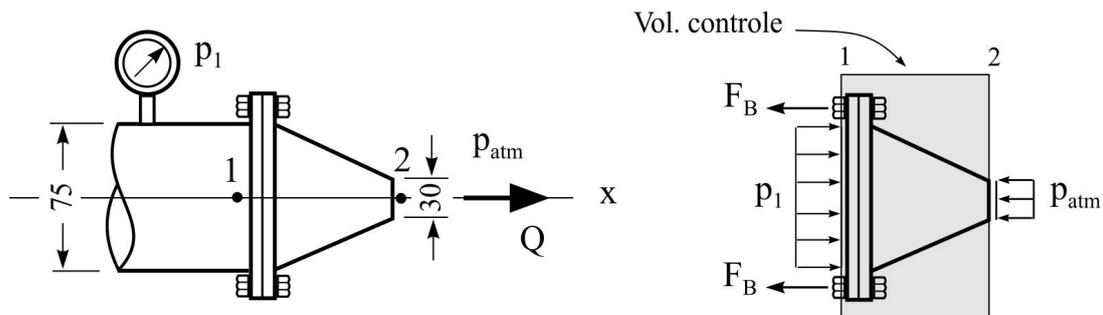
Como em geral a área do bocal é muito menor do que a do tanque ($A_2 \ll A_1$) chega-se à expressão (equação de Torricelli)

$$V_2 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Perdas locais nas vizinhanças do bocal (escoamento é não-uniforme, viscoso etc.) fazem com que a velocidade real seja inferior à esta. A dificuldade é contornada introduzindo o coeficiente de descarga C_d , em geral $0,60 \leq C_d \leq 1,0$, e a vazão real é obtida de

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2gh} \quad (4)$$

Exemplo 2.3.2 Uma mangueira de bombeiro de 75 mm de diâmetro com um bocal de 30 mm descarrega $1,5 \text{ m}^3/\text{min}$ para a atmosfera. Admitindo escoamento sem atrito, estimar a força atuando sobre os parafusos para manter o flange fixo na mangueira.



Solução: Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \quad (1)$$

As velocidades são encontradas a partir da vazão e respectivas áreas: $Q = 1,5 \text{ m}^3/\text{min} = 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$, então, $V_1 = 5,66 \text{ m/s}$ e $V_2 = 35,5 \text{ m/s}$. Uma vez que $p_2 = p_{\text{atm}} = 0$

$$p_1 = \frac{1}{2} \times 1000 \times (35,5^2 - 5,66^2) = 614 \text{ kPa (manom)}$$

Do balanço de quantidade de movimento sobre o volume de controle mostrado na figura, Eq. (2.2.22)

$$F_x + p_1 A_1 = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

Para $\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0,025 = 25 \text{ kg/s}$ e $A_1 = \pi D_1^2/4 = 0,00442 \text{ m}^2$, a força atuando sobre os parafusos, F_B , tem o valor de F_x com o sinal invertido (uma reação a F_x), logo

$$F_B = -F_x = 614100 \times 0,00442 - 25 \times (35,5 - 5,66) = 1968 \text{ N (201 kgf)}$$

Observe que a resultante das forças atuando sobre o fluido (sistema) como resultado da distribuição de pressão no interior do bocal, representado por F_x , tem sinal negativo. Logo, a força atuando sobre o bocal F_B é positiva, i.e., tende a afastá-lo da mangueira.

Exemplo 2.3.3 Água escoar por um duto conforme esquematizado a seguir. Calcular os seguintes parâmetros: i- vazão; ii- pressões nos pontos 1, 2, 3 e 4; iii- elevação do ponto mais alto da trajetória do jato livre (ponto-6). As cotas estão indicadas em metros e os diâmetros (internos) em polegadas. Não considerar perdas devidas ao atrito.

Solução: Para obter a vazão é suficiente calcular a velocidade em algum ponto do sistema. Neste caso isto pode ser conseguido a partir das condições conhecidas no bocal de saída

$$\frac{V_5^2}{2g} = h_R - z_5 = 90 - 21 = 69 \quad \therefore \quad V_5 = 36,79 \text{ m/s} \quad (1)$$

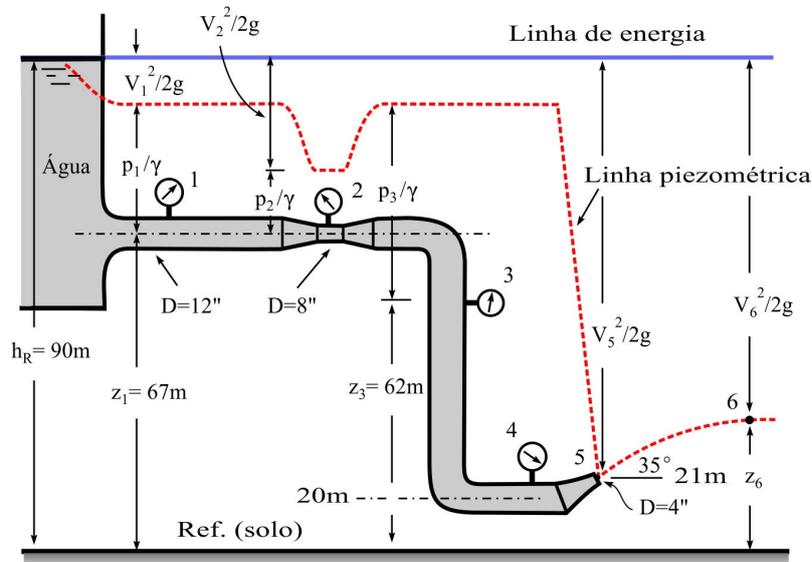
logo

$$Q = VA = 36,79 \times \frac{\pi}{4} \times (4 \times 0,0254)^2 = 0,2983 \text{ m}^3/\text{s} \quad (2)$$

e, para as velocidades,

$$V_1 = V_3 = V_4 = \left(\frac{D_5}{D_1}\right)^2 V_5 = (4/12)^2 \times 36,79 = 4,09 \text{ m/s} \quad (3)$$

$$V_2 = \left(\frac{D_5}{D_2}\right)^2 V_5 = (4/8)^2 \times 36,79 = 9,2 \text{ m/s}$$



Uma vez que a altura de pressão corresponde a diferença de altura entre a linha piezométrica e a linha de centro do duto, as pressões nos diversos pontos indicados podem ser calculadas por

$$p_1 = \rho \left[g(h_R - z) - \frac{V^2}{2} \right]_1 = 1000 \times \left[9,81 \times (90 - 67) - \frac{4,09^2}{2} \right] = 217266 \text{ Pa} = 2,17 \text{ bar}$$

$$p_2 = \rho \left[g(h_R - z) - \frac{V^2}{2} \right]_2 = 1000 \times \left[9,81 \times (90 - 67) - \frac{9,20^2}{2} \right] = 183310 \text{ Pa} = 1,83 \text{ bar}$$

$$p_3 = \rho \left[g(h_R - z) - \frac{V^2}{2} \right]_3 = 1000 \times \left[9,81 \times (90 - 62) - \frac{4,09^2}{2} \right] = 266316 \text{ Pa} = 2,66 \text{ bar}$$

$$p_4 = \rho \left[g(h_R - z) - \frac{V^2}{2} \right]_4 = 1000 \times \left[9,81 \times (90 - 20) - \frac{4,09^2}{2} \right] = 678336 \text{ Pa} = 6,78 \text{ bar}$$

A velocidade do jato livre no topo da trajetória (onde o componente vertical é nulo) é dada pela projeção horizontal da velocidade no bocal uma vez que esta se mantém-se constante em módulo ao longo da trajetória (admitindo ausência de atrito com o ar). Logo

$$V_6 = V_5 \cos\theta = 36,79 \times \cos 35 = 30,14 \text{ m/s} \quad (4)$$

A elevação do ponto mais alto será então (Bernoulli entre reservatório e ponto-6, ver figura)

$$z_6 = h_R - \frac{V_6^2}{2g} = 90 - \frac{30,14^2}{2 \times 9,81} = 43,7 \text{ m} \quad (5)$$

2.4 A Equação de Energia

A última lei de conservação a ser considerada neste estudo refere-se à primeira lei da termodinâmica. Neste caso, a variável intensiva a qual trataremos é a energia do sistema. Portanto, $\beta = dE/dm = e$. A Eq. (2.2.5) aplicada à um volume de controle fixo

$$\left(\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt} \right)_{sys} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho e dV + \int_{sc} \rho e (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.4.1)$$

Lembremos que um valor positivo de Q refere-se ao calor absorvido pelo sistema, enquanto um valor positivo de W refere-se ao trabalho executado pelo sistema.

A energia do sistema por unidade de massa pode ser de vários tipos

$$e = e_{interna} + e_{cinética} + e_{potencial} + e_{outras} \quad (2.4.2)$$

Desconsiderando qualquer outra forma de energia que não as três primeiras

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \quad (2.4.3)$$

Por conveniência o termo relativo ao trabalho é normalmente subdividido em três componentes: trabalhos devidos ao eixo, à pressão e às tensões viscosas

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_v \quad (2.4.4)$$

O trabalho de eixo corresponde aquela porção do trabalho realizado por uma máquina (turbina, bomba, compressor, hélice propulsora, pistão etc.) atravessando a superfície de controle.

O trabalho realizado pelas forças de pressão ocorre somente na superfície; todo trabalho nas partes internas do sistema (dentro do volume de controle) cancelam-se mutuamente resultando num valor nulo. O trabalho de pressão é igual à integral da força de pressão atuando sobre uma pequena área, multiplicada pela velocidade na superfície de controle

$$\dot{W}_p = \int_{sc} p (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.4.5a)$$

Veamos como esta expressão aparece. Consideremos o escoamento entrando num volume de controle conforme sugerido na Fig. 2.4.1a. Enquanto o fluido se desloca existe uma pressão atuando sobre a superfície de entrada do volume de controle que, por sua vez, empurra o fluido à sua frente. O resultado é que enquanto a massa de fluido entra no volume de controle esta realiza trabalho devido ao deslocamento. De forma análoga, o fluido saindo do volume de controle empurra o exterior à sua frente produzindo trabalho sobre ele; i.e. trabalho produzido pelo volume de controle sobre o exterior. A velocidade e a área correspondente a um certo volume, entrando no volume de controle, permite relacionar o fluxo de massa com o volume específico v . Ou seja, a taxa de trabalho realizado sobre o volume de controle (entrando, portanto, negativo) é

$$\dot{W}_{pin} = -FV = \int_{scin} p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{p}{\rho} (\rho V dA) = -\frac{p}{\rho} \dot{m} = -p v \dot{m} \quad (2.4.5b)$$

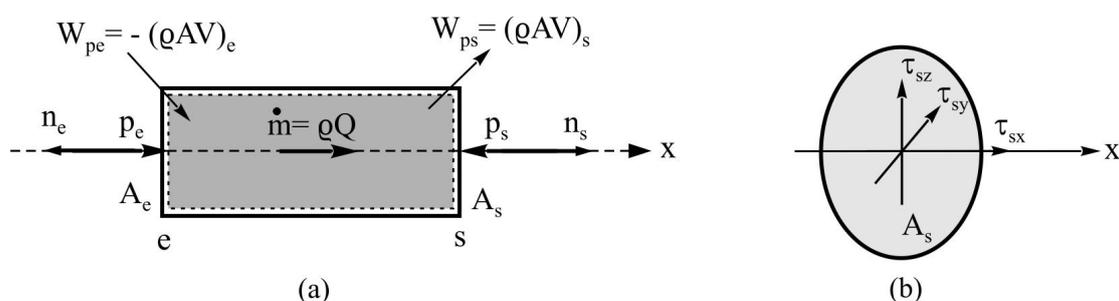


Figura 2.4.1 (a) Trabalho realizado sobre o sistema na entrada e saída do volume de controle; (b) Tensões devidas à viscosidade na superfície de saída do volume de controle, realizam trabalho dissipativo.

O trabalho total realizado pela pressão é então a integral sobre a superfície de controle

$$\dot{W}_p = \int_{sc} p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \int_{sc} \frac{p}{\rho} (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) = \int_{sc} \frac{p}{\rho} \dot{m} \quad (2.4.5c)$$

O trabalho devido às forças viscosas acontece também na superfície e consiste da integral do produto de cada um dos componentes da tensão (uma normal e duas cisalhantes, Fig. 2.4.1b) e o respectivo componente da velocidade. Note que este trabalho é dissipativo, portanto, tem sinal contrário daquele realizado pela pressão. Por exemplo, na entrada do volume de controle mostrado na Fig. 2.4.1a energia é adicionada ao sistema, logo tem sinal negativo. Para toda a superfície de controle tem-se então

$$\dot{W}_v = - \int_{sc} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} dA \quad (2.4.6)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor atuando na superfície dA , Fig. 2.4.1b. Este termo pode ser nulo, dependendo do tipo particular de superfície. Assim:

- Superfície sólida. Para todas as partes de uma superfície sólida que definem uma parede a velocidade é nula ($\mathbf{V} = 0$), portanto, o trabalho é nulo.

- Superfícies de entrada ou saída. Em geral nas superfícies de entrada e saída o escoamento tende a ser aproximadamente normal ao elemento dA ; logo, o único trabalho provém da tensão normal. Uma vez que tensões viscosas normais são extremamente pequenas costuma-se desprezar o trabalho viscoso nas entradas e saídas do volume de controle.

Finalmente, o termo trabalho na Eq. (2.4.1) resume-se a

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{sc} p (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) - \int_{sc} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} dA \quad (2.4.7)$$

Quando as Eqs. (2.4.7) e (2.4.3) são levadas em (2.4.1) verifica-se que o termo de pressão pode ser combinado com o de fluxo de energia, uma vez que ambos referem-se à integrais ao longo da superfície de controle. A equação de energia torna-se então

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.4.8)$$

Utilizando e da Eq.(2.4.3) verifica-se que a entalpia $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$ ocorre na integral da superfície de controle. A equação de energia assume a forma final para um volume de controle fixo

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt} \int_{vc} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho dV + \int_{sc} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.4.9)$$

Nesta expressão foi introduzido a propriedade termodinâmica *entalpia*. A combinação deste termo ($\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$) na expressão do fluxo de energia (ver integral sobre a superfície de controle em 2.4.8 ou 2.4.9), constitui uma das principais razões para a definição de entalpia. Normalmente ela está associada ao termo fluxo de energia na equação de energia. Note que não aparece no termo acumulação.

Exemplo 2.4.1¹⁰ Considere uma tubulação transportando água numa cidade. A água encontra-se à pressão de 700 kPa (7 bar) e à temperatura de 15 °C. Deseja-se acrescentar uma pequena quantidade de água, 1 kg, no duto por uma conexão externa com válvula. Quanto trabalho estará envolvido neste processo?

Solução: Se a água estiver num balde e abrirmos a válvula para tentar colocá-la na tubulação veremos ser impossível; obviamente a água sairá da tubulação sob pressão. Uma alternativa será colocar a água num cilindro com um pistão e conectá-lo à válvula. Após abrir a válvula empurrar o pistão até que toda água seja transferida para a tubulação. O trabalho deste processo será ($\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$)

$$W_p = \int \frac{p}{\rho} (\rho A dx) = \int p dV = \frac{p}{\rho} m = \frac{700 \times 10^3}{1000} \times 1 = 700 \text{ Joules}$$

2.4.1 Aproximação para Escoamento Unidimensional

Se o volume de controle tem uma série de entradas e saídas onde os fluxos podem ser considerados unidimensionais a integral de superfície na Eq. (2.4.9) pode ser simplificada para

¹⁰ Exemplo tirado de Fundamentals of Thermodynamics, R.E. Sonntag, C; Borgnakke, G.J. Van Wylen, John Wiley & Sons, 5th Ed, Cap. 6, 1998.

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt} \int_{vc} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho dV + \quad (2.4.10)$$

$$\sum_{out} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \dot{m} - \sum_{in} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \dot{m}$$

onde as propriedades nos somatórios são avaliados como médias na seção transversal.

Para *regime permanente* ($\dot{m} = \text{const}$), a equação de energia pode ser simplificada para sua forma consagrada em inúmeras análises de engenharia; i.e., de (2.4.10)

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} - \frac{\dot{W}_s}{\dot{m}} - \frac{\dot{W}_v}{\dot{m}} = q - w_s - w_v = \sum_{out} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) - \sum_{in} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \quad (2.4.11)$$

onde $q = \dot{Q}/\dot{m} = dQ/dm$ é a transferência de calor para o sistema (fluido) por unidade de massa. De forma análoga, $w_s = \dot{W}_s/\dot{m} = dW_s/dm$ e $w_v = \dot{W}_v/\dot{m} = dW_v/dm$.

Note que o fluxo de massa \dot{m} é o produto da massa específica com o produto escalar da velocidade com a área, $\dot{m} = \rho(\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A})$. Portanto, se a velocidade for negativa (fluxo no sentido de 2 para 1), os sinais dos dois termos do lado direito da equação (2.4.11) devem ser invertidos.

Consideremos o caso particular de uma entrada (1) e uma saída (2), a Eq.(2.4.11) simplifica-se para (com fluxo positivo)

$$q - w_s - w_v = \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right)_2 - \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right)_1 \quad (2.4.12)$$

Esta é a forma geral para a *equação de energia em regime permanente*. Ela estabelece que a entalpia de estagnação a montante difere da entalpia de estagnação a jusante somente se ocorrer transferência de calor, trabalho de eixo e trabalho viscoso, na medida que o fluido passa do ponto 1 para 2.

Reescrevendo a entalpia em função da energia interna e pressão, $h = \hat{u} + p/\rho$ e desprezando o trabalho devido ao atrito viscoso, i.e., $w_v \approx 0$ (normalmente podemos fazer isso), obtém-se a equação

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_s + [\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q] \quad (2.4.13)$$

que, na forma diferencial, torna-se

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + VdV + g dz + dw_s + d\hat{u} - dq = 0 \quad (2.4.14)$$

ou ainda

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + g dz + dw_s + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + d\hat{u} - dq = 0 \quad (2.4.15)$$

Aqui cabe uma observação. Conforme vimos, *sistema* para nós é o que também se denomina em termodinâmica de *sistema fechado*⁷, quando este não troca massa com o exterior (massa se conserva no sistema), podendo trocar calor com o exterior.

Consideremos dq como a quantidade de calor que uma partícula recebe ao se deslocar ao longo de uma trajetória de P para P'. Da primeira lei da termodinâmica¹¹ para um sistema fechado (por unidade de massa) pode-se obter a relação

$$Tds = d\hat{u} + p dv = d\hat{u} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.4.16)$$

Esta relação é válida somente para processos lentos onde equilíbrio termodinâmico é garantido, embora para qualquer tipo de processo, reversível ($dq=Tds$) ou irreversível. A *quantidade de calor total que a partícula recebe num intervalo dt* tem origem em duas fontes. Uma, digamos dq_o , advém da condição de contorno, por transmissão de calor como condução, convecção ou radiação, por exemplo, num processo termodinâmico reversível (lento), como no processo de troca de energia mecânica na compressão ou expansão de um gás e outras situações práticas. A segunda parte, digamos dq_f , é devido ao efeito de forças de atrito que atuam sobre a partícula. Assim podemos escrever

$$dq = dq_o + dq_f \quad (2.4.17)$$

¹¹ Fundamentals of Thermodynamics, R.E Sontag, C. Borgnakke, G.J. van Wylen, John Wiley & Sons, N.Y., Cap. 8., 1998.

Admite-se por hipótese que o calor por atrito, equivalente ao trabalho das forças de atrito atuantes sobre a superfície da partícula ao longo de sua trajetória, é transmitido de forma imediata e igualmente em todos os pontos na partícula. Por outro lado, acabamos de ver que o componente dq_o em (2.4.17) tem origem de fontes externas ao campo de escoamento (pelo contorno).

Um escoamento termicamente isolado, quando calor não é trocado entre o fluido e o exterior, segue um *processo adiabático*. Portanto, num processo adiabático, dq_o será zero. Por outro lado, num processo isentrópico (entropia constante), dq_o e dq_f devem ser ambos nulos, por definição. Neste caso, para um fluido real (viscoso), calor dissipado pelo campo de escoamento precisaria de um resfriamento externo na mesma taxa de transferência de calor gerado pelo atrito viscoso, uma situação extremamente difícil de ocorrer na prática.

Combinando as equações (2.4.15-17)

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + g dz + dw_s + Tds - dq_f - dq_o = 0 \quad (2.4.18)$$

Por outro lado, da desigualdade de Clausius (Sontag *et al. op. cit.*)

$$Tds - dq \geq 0 \quad \therefore [Tds)_{rev} + Tds)_{gen}] - (dq_o + dq_f) = Tds)_{gen} - dq_f \quad (2.4.19)$$

onde o sinal igual aplica-se para processo reversível e $Tds)_{gen}$ representa a geração de entropia, ou a perda de se extrair trabalho. Denominando w_f as perdas (por unidade de massa) para um processo irreversível nesta equação

$$dw_f = Tds)_{gen} - dq_f \geq 0 \quad (2.4.20)$$

dw_f é positivo para um processo irreversível e nulo para reversível [$Tds)_{gen} - dq_f = 0$], não podendo ser jamais negativo. Levando (2.4.19 e 2.4.20) em (2.4.18)

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + g dz + dw_s + dw_f = 0 \quad (2.4.21)$$

Integrando entre duas seções 1 e 2

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + w_s + w_f \quad (2.4.22)$$

Conforme convenção usual, o trabalho realizado pelo sistema (w_s) com o exterior, como uma turbina, é positivo, sendo negativo quando realizado por uma bomba, ou compressor. A seção-1 é definida a montante e 2 a jusante do escoamento.

Se a massa específica puder ser considerada constante entre 1 e 2 ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), a equação de energia torna-se

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_s + w_f \quad (2.4.23)$$

Dividindo por g cada termo passa a ter dimensão de comprimento, ou “altura”, uma forma muito utilizada por engenheiros,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_s + h_f \quad (2.4.24)$$

onde $h_s = w_s/g$ e $h_f = w_f/g$ representam, respectivamente, as variações de alturas (m) devidas aos trabalhos de eixo e atrito viscoso entre o sistema e o exterior, entre 1 e 2, por unidade de peso.

Da definição de h_s e w_s , Eq. (2.4.11)

$$h_s = \frac{w_s}{g} = \frac{\dot{W}_s}{\dot{m} g} = \frac{\dot{W}_s}{\rho g Q} \quad (2.4.25)$$

onde a \dot{W}_s representa a energia total transferida, por unidade de tempo (potência), entre as seções 1 e 2. Para o sistema SI a unidade de \dot{W}_s e \dot{Q}_o é J/s= watt, e Q (vazão) em m^3/s .

Finalmente, observemos que para um fluido compressível (gás, v.g.), a equação de energia deve incluir a integral indicada na Eq. (2.4.21). Note ainda que na ausência de movimento e trabalho esta reduz-se à equação da hidrostática (1.5.15)

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 \quad (2.4.26)$$

2.4.2 Equação de Energia e Equação de Bernoulli

Quando a equação de Bernoulli (2.3.8) foi deduzida destacou-se que foram desprezados atrito, troca de calor e todo trabalho (um processo isentrópico), exceto aquele devido às forças de pressão. Lembrando a definição de altura total de Bernoulli, ou altura da linha de energia,

$$h_t = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \quad (2.4.27)$$

podemos escrever a equação de energia (2.4.23) como

$$h_{t1} = h_{t2} + h_s + h_f \quad \text{ou} \quad h_{t2} = h_{t1} - h_s - h_f \quad (2.4.28)$$

Portanto, a altura total de Bernoulli pode variar entre 1 e 2 devido ao trabalho e perdas por atrito entre as duas seções. Ou, também, a entalpia em 2 é igual entalpia em 1 subtraída da altura de eixo (negativa para bomba, por exemplo) e de atrito. Ou seja, a equação de energia é menos restritiva do que a equação de Bernoulli, uma vez que esta requer, simplesmente, $h_{t1} = h_{t2}$. Observe ainda de (2.4.28) que, confirmando o destacado em §2.3, a equação de Bernoulli requer ausência de troca de calor com o tubo de corrente.

2.4.3 Equação de Pressão de Bernoulli

A equação de Bernoulli pode ser escrita na forma

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{const} \quad (2.4.29)$$

nesta equação p é definido como a *pressão estática*, $\rho V^2/2$ a *pressão dinâmica* e $\rho g z$ a *pressão potencial*, todos os termos avaliados na linha de corrente (centro de um duto, v.g.), num ponto qualquer.

Veremos ao longo de diversas aplicações que é interessante definir o conceito de

pressão de estagnação p_o , ou *pressão total* p_t . Como o próprio nome sugere, esta pressão representa a soma das pressões estática e dinâmica

$$p_t = p_o = p + \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.4.30)$$

Pressão Estática

A *pressão estática* é a pressão real do fluido em qualquer instante esteja este em movimento ou não. A medida da pressão estática em um fluido em movimento deve ser feita por um sensor que não perturbe a velocidade. Se a pressão dinâmica não pode ser desprezada com respeito à pressão do fluido não perturbado não basta reduzir a dimensão do instrumento, é preciso modificar sua forma tal que o escoamento seja perturbado o menos possível.

O tubo estático mostrado na Fig. 2.4.2a é um tubo delgado mantido paralelo ao escoamento com alguns orifícios na lateral. A pressão medida neste caso é pouco sensível a pequenos desvios na inclinação do tubo.

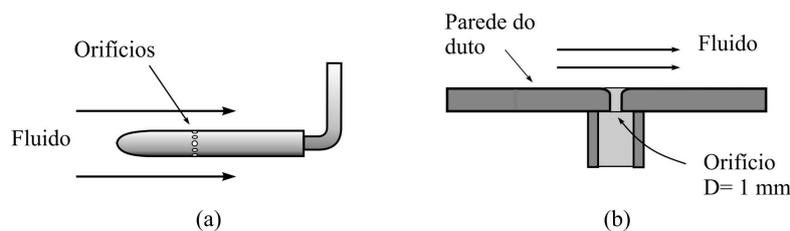


Figura 2.4.2 Medindo a pressão estática: a) tubo estático; b) furo na parede do duto.

Uma alternativa simples de medir a pressão estática, sem a introdução de um instrumento no escoamento, é por um pequeno orifício, normal à superfície de contorno, no ponto onde se deseja obter a pressão conforme mostrado na Fig. 2.4.2b. O fluido passa pelo orifício mas permanece imóvel. O fato da velocidade ser diferente nas partes externa e interna do orifício não constitui uma contradição uma vez que as constantes de Bernoulli para as duas regiões são diferentes, cf. Eq. (2.4.29).

É importante na medição da pressão estática que o fluido não seja perturbado no ponto de medida; importante ter certeza de que não existem rebarbas na entrada do orifício. Pequenas imperfeições dessa natureza conduzem a resultados completamente

falsos. Recomenda-se arredondar ligeiramente a entrada do orifício, conforme mostrado na Fig. 2.4.2b.

Pressão de Estagnação

A *pressão total* está associada à energia cinética do fluido. Pode ser medida mais facilmente do que a pressão estática por um sensor fixo ao contorno sólido que provoca a estagnação do fluido num processo isentrópico

Para dois pontos ao longo de uma linha de corrente a equação de Bernoulli pode ser escrita em termos das pressões totais (cf. definição na Eq. 2.4.30)

$$p_{t2} = p_{t1} + \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.4.31)$$

mostrando que, mesmo num processo isentrópico (sem perdas por atrito e troca de calor), a pressão total, ou de estagnação, varia sempre que houver diferença de elevação entre os pontos. Observe que esta situação é válida para qualquer fluido, compressível ou incompressível. Se a elevação for constante ($z_2 = z_1$) conclui-se que a *pressão total permanece constante* ($p_{t2} = p_{t1}$)!

A relação entre pressão e velocidade é muito utilizada na medida de velocidade. Mostramos a seguir uma aplicação onde os conceitos de pressão estática e pressão total estão associados a um aparelho de medida de velocidade, o tubo de Pitot.

Tubo de Pitot (Tubo de Estagnação)

Um tubo de Pitot, tal como mostrado na Fig. 2.4.3, consiste basicamente de um tubo com uma abertura apontada na direção do escoamento. Na ponta do tubo está localizado o ponto de estagnação. Desta forma o tubo de Pitot mede a pressão total p_t de acordo com a Eq. (2.4.30)

$$p_t = p_o = p + \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.4.32)$$

onde p é a pressão estática, medida pelo piezômetro-A e $\rho V^2/2$ a pressão dinâmica. Lidos

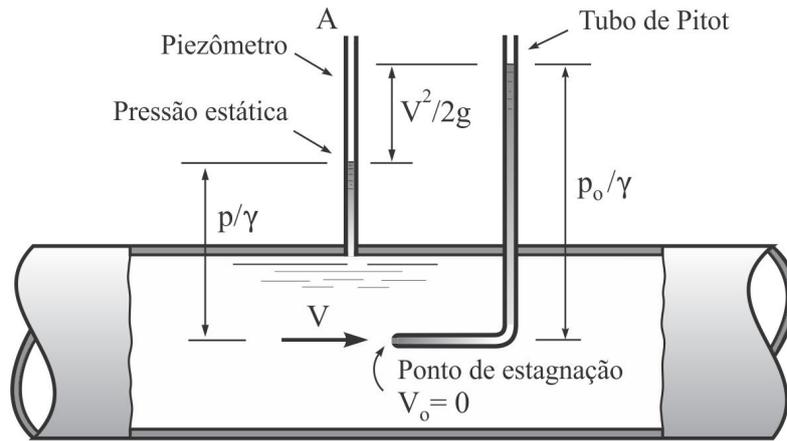


Figura 2.4.3 Tubo de Pitot instalado num duto.

os valores das duas pressões a velocidade local pode ser facilmente determinada. Caso a velocidade não tenha uma distribuição uniforme na seção transversal (uma situação real), o tubo de Pitot pode ser utilizado para determinar o perfil de velocidade deslocando-o radialmente

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad (2.4.33)$$

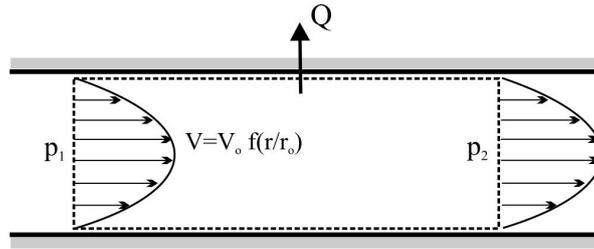
Note que a equação (2.4.32) pode ser também escrita na forma adimensional

$$\frac{p_0 - p}{\rho V^2/2} = 1 \quad (2.4.34)$$

Exemplo 2.4.2 O escoamento horizontal, incompressível, permanente, num duto circular tem um perfil de velocidade caracterizado pela função

$$V = V_0 f(r/r_0) \quad (1)$$

onde V_0 é a velocidade média, r_0 o raio interno e $f(r/r_0)$ uma função arbitrária de r/r_0 . Admitindo que: a) a pressão é uniforme na seção transversal; b) o perfil da temperatura em qualquer seção é idêntico e uniforme; c) as forças viscosas normais são desprezíveis; d) a pressão cai de p_1 para p_2 entre as seções 1 e 2, determinar a taxa de troca de calor nas paredes entre as seções 1 e 2 que garanta a hipótese de temperatura uniforme ao longo do duto.



Solução: Consideremos um volume de controle fixo no interior do duto conforme mostrado na figura. As equações de continuidade e energia simplificam-se (regime permanente e $\rho = \text{const}$) para [cf. Eq. (2.2.11) e (2.4.9)]

$$-\int_{sc1} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) = \int_{sc2} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) = \dot{m} \quad (2)$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_v + \int_{sc} \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A})$$

O trabalho devido à tensão cisalhante na parede não existe uma vez que o fluido não se desloca ali. Trabalho cisalhante também é nulo na entrada e saída uma vez que a tensão cisalhante é normal ao escoamento, logo $\dot{W}_v = 0$. Analisemos separadamente as integrais dos quatro termos restantes da Eq.(2b). Para um perfil de temperatura uniforme

$$\begin{aligned} \int_{sc} \hat{u} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) &= C_v (T_2 - T_1) \dot{m} = 0 \\ \int_{sc} gz \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) &= 0 \\ \int_{sc} \frac{V^2}{2} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) &= 0 \\ \int_{sc} \frac{p}{\rho} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) &= \frac{P_2 - P_1}{\rho} \dot{m} \end{aligned} \quad (3)$$

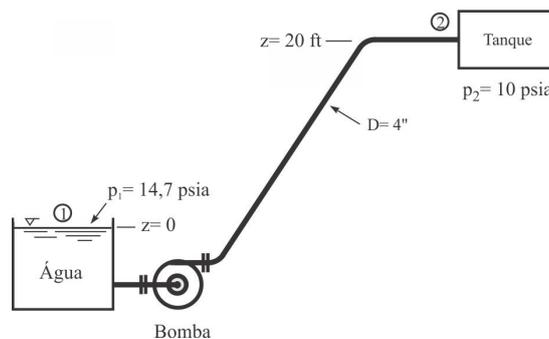
Logo, (2b) resume-se a

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{P_2 - P_1}{\rho} \dot{m} \\ \therefore \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} &= \frac{dQ/dt}{dm/dt} = \frac{dQ}{dm} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \end{aligned} \quad (4)$$

Ou seja, a redução na energia de pressão experimentada pelo fluido entre as duas seções é igual à

transferência de calor por unidade de massa para o exterior (observe que o sinal do lado direito da equação (4) é negativo!). O resultado tem a ver com a hipótese de que a temperatura do sistema permanece constante ao longo do escoamento; logo, calor tem que ser retirado para manter a temperatura constante. No caso de um fluido muito viscoso a temperatura do fluido pode não permanecer uniforme.

Exemplo 2.4.3 Uma bomba transporta 1,5 ft³/s de água para um tanque que se encontra 20 ft acima do reservatório. As perdas entre 1 e 2 são dadas por $h_f = K_f V_2^2 / 2g$ com $K_f = 7,5$. Determinar a potência necessária para acionar a bomba se esta tem uma eficiência hidráulica de 81% e o motor que a aciona de 91%.



Solução: Conversão de unidades: 1 lb_f = 32,2 lb-ft/s², 1 psi = 1 lb_f/in² = 32,2 lb-ft/-in²-s² = 32,2 × 144 lb-ft/-ft²-s² = 4636,8 lb/ft-s²; 1 kW = 737,6 lb_f-ft/s. Massa específica da água: $\rho = 62,2$ lb/ft³.

O escoamento é em regime permanente exceto pelo pequeno decréscimo ao longo da profundidade do reservatório que estaremos desprezando admitindo $V_1 = 0$ e pelas condições dentro da bomba. Calculamos V_2 a partir da vazão e do diâmetro

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{1,5}{\frac{\pi \times (4/12)^2}{4}} = 17,18 \text{ ft/s}$$

Uma vez que não há trabalho de atrito nas paredes sólidas e devido à costumeira hipótese de escoamento unidimensional o trabalho viscoso é nulo. Então, a equação de energia (2.4.23) torna-se

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_s + h_f$$

Com $h_f = K V_2^2 / 2g$ obtém-se para a energia de bombeio h_s ,

$$h_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - (1 + K_f)V_2^2}{2g} + (z_1 - z_2)$$

para $V_1 = z_1 = 0$, obtém-se para os dados do problema, em unidades inglesas

$$h_s = \frac{(14,7 - 10) \times 32,2 \times 144}{62,2 \times 32,2} - \frac{(1 + 7,5) \times 17,18^2}{2 \times 32,2} - 20 = -45,8 \text{ ft}$$

A altura de energia da bomba é negativa, indicando que energia está sendo transferida para o sistema (fluido). A potência de bombeio é então (ignorando o sinal), Eq. (2.4.24)

$$N_s = \rho g Q h_s = 62,4 \times 32,2 \times 1,5 \times 45,8 / 32,2 = 4287 \text{ lbf-ft/s} \Rightarrow \therefore N_s = \frac{4287}{737,6} = 5,81 \text{ kW}$$

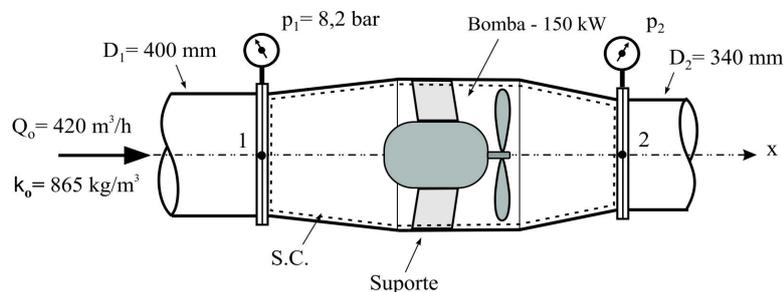
A potência de entrada na bomba (pelo motor elétrico, por exemplo) necessária para transferir esta quantidade de energia para o fluido será

$$N_b = \frac{N_s}{\eta_b} = \frac{5,81}{0,81} = 7,17 \text{ kW}$$

logo, a potência do motor que aciona a bomba será

$$N_m = \frac{N_b}{\eta_m} = \frac{7,17}{0,91} = 7,9 \text{ kW}$$

Exemplo 2.4.4 Na figura é mostrado o esquema de um conjunto motor-bomba instalado no interior de um duto para bombear óleo com massa específica $\rho_o = 865 \text{ kg/m}^3$. Para as dimensões indicadas e uma vazão de $420 \text{ m}^3/\text{h}$, pede-se o valor da força atuando sobre os suportes do sistema. O motor elétrico tem potência de 150 kW e rendimento elétrico-mecânico de 93% . A bomba tem rendimento hidráulico de 81% . A carcaça do conjunto motor-bomba-suporte apresenta um coeficiente de perda hidráulica (baseada na velocidade de saída) igual a $8,0$; i.e., $\Delta p_s = K_s \rho V_2^2 / 2$ ($K_s = 8$). Uma solução mais completa (incluindo o problema térmico) deste problema pode ser encontrado no Exemplo 9.1, Capítulo 9.



Solução: Observe o volume de controle escolhido cortando os suportes. A resultante das forças sobre o duto incluirá forças viscosas e forças de reação atuando sobre a estrutura. Para regime permanente a vazão de massa é constante; da equação de conservação de quantidade de movimento

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x = (\dot{m} V)_{out} - (\dot{m} V)_{in} = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

Por outro lado não conhecemos ainda as velocidades, nem a pressão na descarga. Uma vez que o fluido pode ser considerado incompressível a vazão volumétrica é constante $Q_1 = Q_2$, $V_1 = Q/A_1$ e V_2 obtido da relação $V_2 = (A_1/A_2) \times V_1$.

Para determinar a pressão em 2 podemos ser tentados a utilizar a equação de Bernoulli. Isto seria um grave erro uma vez que na região da bomba o escoamento é não-permanente com consideráveis efeitos de atrito viscoso. Por outro lado pode-se utilizar a equação de energia para o volume de controle indicado sob o argumento de que flutuações locais produzem um valor médio de energia armazenada na região da bomba que permanece constante no tempo. Para este tipo de equipamento pode-se considerar também o escoamento como praticamente isotérmico (energia interna constante). De (2.4.23), para $z_1 = z_2$, incluindo perdas locais

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2\right)_1 + w_b = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2\right)_2 + K_s \frac{1}{2} V_2^2$$

Lembremos que o termo de energia nesta equação refere-se ao trabalho de eixo por unidade de massa introduzido no sistema (o fluido), Eq. (2.4.24), ou seja

$$w_b = \eta_m \eta_b \frac{W_m}{\dot{m}} = \eta_m \eta_b \frac{W_m}{\rho Q}$$

onde η_m η_b representam, respectivamente, os rendimentos do motor e da bomba (parte da energia dissipada, devido aos rendimentos das máquinas é transformada em calor, considerado como fonte Q_v). Note-se ainda que o termo devido às perdas por atrito entre as seções 1 e 2, w_f na eq. (2.4.21), está refletido no coeficiente K_s da equação. Combinando essas equações obtém-se a pressão em 2

$$p_2 = p_1 + \eta_m \eta_b \frac{W_m}{Q} - \frac{\rho Q^2}{2 A_2^2} \left[1 + K_s - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right]$$

Para $Q = 420/3600 = 0,11667 \text{ m}^3/\text{s}$

$$p_2 = 8,2 \times 10^5 + \frac{0,93 \times 0,81 \times 150 \times 10^3}{0,11667} - \frac{865 \times 0,11667^2}{2 \times (\pi \times 0,34^2/4)^2} \left[1 + 8 - \frac{0,34^4}{0,40^4} \right] = 1,79 \text{ MPa} \quad (17,9 \text{ bar})$$

Levando esses valores na primeira equação a força atuando sobre o fluido é

$$\begin{aligned} F_x &= p_2 A_2 - p_1 A_1 + \dot{m} (V_2 - V_1) \\ &= \frac{\pi}{4} (1,79 \times 0,34^2 - 0,82 \times 0,4^2) \times 10^6 + \frac{4}{\pi} (865 \times 0,11667^2 \times (1/0,34^2 - 1/0,4^2)) \\ &= 59437 \text{ N} \quad (\approx 6.061 \text{ kg}_f) \end{aligned}$$

Logo, sobre a estrutura atua uma força $R_x = -6.061 \text{ kg}_f$, no sentido negativo do eixo-x; i.e., da direita para

a esquerda. Por último, note-se que a bomba produz um recalque de $17,9 - 8,2 = 9,7$ bar.

2.5 Equações de Conservação – Relações Diferenciais

Vimos que as leis fundamentais da mecânica dos fluidos podem ser expressas como integrais em regiões do espaço. É evidente que muitos problemas podem ser tratados numa forma aproximada simplesmente escolhendo valores médios para propriedades do fluido como massa específica, quantidade de movimento e energia, por exemplo. A preocupação principal não é com o detalhe fino do comportamento do fluido mas com médias e aproximações que fornecem resultados suficientemente precisos para problemas práticos.

A despeito da grande aplicabilidade da técnica de volume de controle seu uso é muitas vezes limitado. Informações detalhadas sobre o escoamento são perdidas na formulação integral. Se detalhes são necessários podemos obtê-los de duas maneiras. A primeira consiste em estudos de laboratório. O procedimento é em geral custoso, embora possa ser a única forma de obter alguma informação particular. A segunda maneira consiste em estabelecer as equações de conservação na forma diferencial e resolvê-las. Devido às não-linearidades das equações essas requerem uma solução numérica, assunto hoje altamente especializado na análise de escoamento de fluidos mas comumente utilizado, sobretudo com a disponibilidade de softwares dedicados à área conhecida como mecânica dos fluidos computacional-MFC, ou CFD — *computational fluid dynamics* —, na literatura inglesa. Veremos a seguir a forma geral das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. A equação de conservação de massa será desenvolvida a partir dos conceitos básicos de conservação, enquanto as duas outras equações serão simplesmente apresentadas nas formas usuais. Detalhes da obtenção dessas equações podem ser obtidos em um bom livro de mecânica dos fluidos. Igualmente, algumas características e soluções analíticas serão mostradas para a aplicação particular de escoamento em dutos.

2.5.1 A Equação de Continuidade

A equação é obtida escrevendo o balanço de massa para um volume elementar estacionário $\delta x \delta y \delta z$ pelo qual o fluido escoar, Fig. 2.5.1.

Começamos com um par de faces perpendiculares ao eixo- y . O fluxo de massa na face- y é $(\rho u)_y \delta x \delta z$, enquanto na face- $(y+\delta y)$ é $(\rho u)_{y+\delta y} \delta x \delta z$. Expressões análogas são escritas para os outros dois pares de faces. A taxa de acumulação de massa dentro do

volume elementar é $(\partial\rho/\partial t) \delta x\delta y\delta z$. O balanço de massa torna-se então

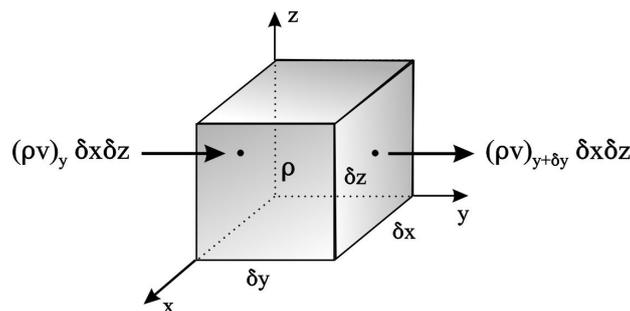


Figura 2.5.1 Elemento de fluido mostrando fluxos de massa em faces paralelas.

$$\begin{aligned} \delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \delta y \delta z [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+\delta x}] + \delta x \delta z [(\rho u)_y - (\rho u)_{y+\delta y}] \\ & + \delta x \delta y [(\rho u)_z - (\rho u)_{z+\delta z}] \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

expandindo, dividindo por $\delta x\delta y\delta z$, e tomando o limite dessas dimensões para zero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.5.2)$$

Esta é a equação da continuidade na forma diferencial. Podemos ainda escrevê-la na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.5.3)$$

Escoamento Permanente Compressível

Se o escoamento é permanente, $\partial/\partial t \equiv 0$, então

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.5.4)$$

Uma vez que a massa específica e a velocidade são ambas variáveis esta ainda é uma equação não-linear e bastante complexa, embora um considerável número de soluções de casos especiais possam ser encontrados com relativa facilidade.

Escoamento Incompressível (Massa Específica Constante)

Um caso especial que permite uma grande simplificação é o escoamento com massa específica constante ($\rho = \text{const}$), ou quando sua variação é pequena. Então $\partial\rho/\partial t \approx 0$, independentemente se o escoamento é permanente ou não. Neste caso (2.5.4) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5.5)$$

Esta é uma equação diferencial linear para a qual uma grande quantidade de soluções são conhecidas. Embora muitos problemas práticos de engenharia possam fazer uso de tal aproximação certas categorias de problemas envolvendo a simulação de escoamento de líquidos em dutos devem manter a forma das Eqs. (2.5.2) ou (2.5.4). Métodos numéricos modernos tratam adequadamente as não-linearidades, garantindo precisão na solução dessas equações.

Por outro lado, às vezes é conveniente tratar certos escoamentos como incompressíveis. Uma pergunta surge naturalmente: quando podemos fazer isso? Um critério simples pode nos fornecer condições para as quais este tipo de aproximação pode ser considerado “razoável”.

Consideremos um escoamento unidimensional em regime permanente. De (2.5.2)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.5.6)$$

O escoamento poderá ser considerado aproximadamente incompressível se o segundo termo do lado direito for “pequeno” relativo ao primeiro; ou seja, se

$$\left| V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right| \ll \left| \rho \frac{\partial V}{\partial x} \right| \quad (2.5.7)$$

ou

$$\left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right| \ll \left| \frac{\delta V}{V} \right| \quad (2.5.8)$$

Veremos mais tarde que a variação de pressão no escoamento compressível é proporcional à variação da massa específica e ao quadrado da velocidade do som c^2 no fluido, i.e. $\delta p = c^2 \delta \rho$. Da equação de Bernoulli (2.3.8), a variação da pressão está

associada à variação da velocidade por $\delta p = -\rho V \delta V$. Combinando essas duas equações com (2.5.8) acima obtém-se um critério explícito para escoamento incompressível

$$\frac{V^2}{c^2} = Ma^2 \ll 1 \quad (2.5.9)$$

onde $Ma = V/c$ é o número de Mach do escoamento. Quão pequeno deve ser esta relação para satisfazer a condição acima? Um valor comumente aceito na prática é

$$Ma \leq 0.3 \quad (2.5.10)$$

Para ar na condição padrão a velocidade do som é $c = 342$ m/s, portanto um escoamento pode ser considerado incompressível no ambiente ar quando as velocidades são inferiores a 100 m/s ($\approx 0,3 \times 342$). Isso inclui uma grande variedade de situações como: movimentos de automóveis e trens, pequenas aeronaves, pouso e decolagem de aviões a jato, a maioria dos escoamentos em dutos e turbomáquinas operando a rotações moderadas.

Exemplo 2.5.1 Um compressor centrífugo com rotor de 40 cm de diâmetro é utilizado para bombear hidrogênio a 15 °C e 1 atm de pressão. Qual deve ser a maior rotação possível para se evitar efeitos de compressibilidade na ponta das pás se a velocidade do som é de 1300 m/s?

Solução: Admitindo que a velocidade do gás saindo do rotor é igual à velocidade tangencial $V = 0,5 \times \omega \times D$. Para que a velocidade máxima seja 0,3 da velocidade do som, $0,3 \times 1300 = 390$ m/s, devemos ter

$$\frac{1}{2} \omega \times 0,40 < 390$$

ou $\omega \leq 1950$ rd/s, i.e. $\omega \leq 18600$ rotações/minuto!

2.5.2 A Equação de Quantidade de Movimento

Tendo mostrado o procedimento para obtenção da equação de continuidade apresentamos a equação de quantidade de movimento, sem desenvolvê-la, limitando a apresentação para fluido newtoniano. Como discutido no § 1.1, as tensões viscosas são proporcionais à taxa de deformação do fluido e ao coeficiente de viscosidade μ . Para fluidos incompressíveis

a equação reduz-se à consagrada equação de *Navier-Stokes* ¹²

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{W} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.5.11)$$

onde \mathbf{W} representa a força de corpo (gravitacional etc.) atuando sobre o fluido. Tratando-se de uma relação vetorial a equação admite três componentes. Para coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + W_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + W_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + W_z + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Como podemos observar, as equações são não-lineares de segunda ordem e extremamente complexas. Até certo ponto de forma surpreendente, muitas soluções analíticas existem para essas equações, algumas das quais veremos no próximo capítulo. Quatro incógnitas são definidas nas equações: p , u , v e w . Elas devem ser combinadas com a equação de continuidade para escoamento incompressível (2.5.5), constituindo quatro equações para as quatro incógnitas. Dadas condições iniciais (i.e., em $t=0$), e de contorno apropriadas, soluções podem ser obtidas para o sistema.

¹² A expressão geral da equação de Navier-Stokes para fluidos compressíveis e viscosidade variável (com a temperatura e pressão, por exemplo) é consideravelmente mais complexa do que (2.5.12). Na sua forma mais geral a equação apresenta um segundo coeficiente de viscosidade associado a um termo devido à compressibilidade, $\text{div } \mathbf{V}$. Felizmente, para a maioria dos escoamentos compressíveis que encontramos na prática da engenharia este termo pode ser considerado desprezível quando comparado com os outros da equação. Assim, embora no sentido estrito a forma acima se aplica somente para fluidos incompressíveis, ela pode ser utilizada para muitos problemas onde este efeito não é extremamente relevante. Por outro lado, problemas onde a viscosidade varia significativamente (com a temperatura, por exemplo) devem ser resolvidos na forma mais geral da equação. O leitor interessado poderá encontrar maiores detalhes no livro *Boundary Layer Theory*, de H. Schlichting e K. Gersten, Springer-Verlag, 8a Ed., 2000.

As Equações de Euler

Se o escoamento puder ser considerado não-viscoso a Eq. (2.5.11) reduz-se à igualmente consagrada equação de Euler

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.5.13)$$

Destaque-se que a equação de Bernoulli pode ser obtida integrando esta equação ao longo de uma linha de corrente.

2.5.3 A Equação de Energia

A obtenção da equação de energia na forma diferencial segue o mesmo procedimento das equações anteriores. Na sua forma mais geral a equação é razoavelmente complexa; por isso restringiremos a análise a somente algumas das suas expressões mais simples. Uma dessas é

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi \quad (2.5.14)$$

onde Φ é a *função dissipação-viscosa* que, para um fluido newtoniano, tem a forma

$$\frac{\Phi}{\mu} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.5.15)$$

Uma vez que todos os termos são quadráticos a dissipação viscosa é sempre positiva, de tal forma que um escoamento viscoso tende sempre a perder energia disponível devido à dissipação, absolutamente de acordo com a segunda lei da termodinâmica.

A equação de energia (2.5.14) é válida para fluidos newtonianos sob condições bastante gerais de escoamento não-permanente, compressível, viscoso, com transferência de calor (exceto por radiação ou fontes internas devido à reações químicas ou nucleares).

A Eq. (2.5.14) ainda é difícil de ser tratada, requerendo, em geral, soluções numéricas. Se admitirmos que as propriedades termodinâmicas c_v , μ , k , ρ são constantes, e que $d\hat{u} \approx c_v dT$, então ela assume a forma simplificada

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (2.5.16)$$

Note que esta equação envolve a temperatura como variável primária e a velocidade como variável secundária que aparece na derivada substantiva DT/Dt e na função dissipação.

Muitas soluções existem para a Eq. (2.5.16) para inúmeras condições, sendo o assunto objeto de livros avançados em escoamento viscoso e de transferência de calor.

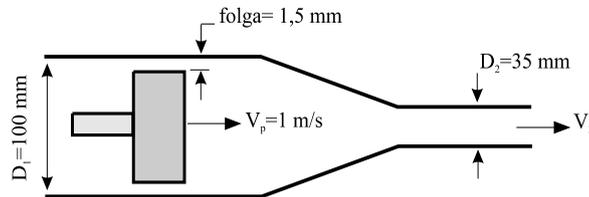
Uma situação especial bastante conhecida ocorre quando o fluido é estacionário, ou tem velocidade desprezível, quando o termo dissipativo pode ser desprezado, chegando-se à forma

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (2.5.17)$$

conhecida como *equação de difusão*, ou *de condução de calor* em matemática aplicada, sendo válida para fluidos ou corpos de qualquer natureza, líquidos, gasosos ou sólidos. A solução analítica da equação para inúmeras situações da física-matemática constitui parte importante de cursos e literatura que tratam de transferência de calor avançada.

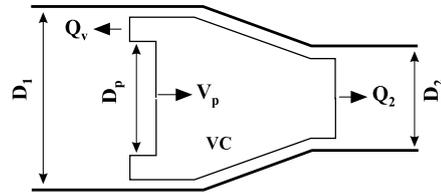
EXERCÍCIOS

Exercício 1.1. Um pistão com diâmetro de 97 mm desloca-se dentro de um tubo contendo um fluido incompressível conforme esquematizado na figura abaixo. O pistão desloca-se à velocidade constante de 1,0 m/s. Admitindo ocorrer vazamento entre o pistão e a parede do duto, e que a vazão do vazamento corresponde a 15% da vazão a jusante (seção-2) calcular: a) a velocidade média do fluido V_2 ; b) a velocidade média (relativa à parede fixa do tubo) do vazamento.



Solução: O pistão move-se para a direita e fluido escoo pela seção-2 e entre o pistão e a parede. Um volume de controle deformável é indicado na figura ao lado.

a) A equação de continuidade na forma integral é [Eq. (2.2.10)]



$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho (\mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{A}) = 0 \quad (1)$$

Para fluido incompressível, e tendo em vista que o volume de controle reduz-se à taxa $dV/dt = -V_p A_p$, obtém-se de (1)

$$\frac{dV}{dt} + Q_2 + Q_v = \frac{dV}{dt} + Q_2 + 0,15 Q_2 = \frac{dV}{dt} + 1,15 Q_2 = -V_p A_p + 1,15 Q_2 = 0$$

ou

$$-V_p \left(\frac{\pi D_p^2}{4} \right) + 1,15 V_2 \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad V_2 = \frac{1}{1,15} \frac{D_p^2}{D_2^2} V_p = 6,68 \text{ m/s } \textit{Resp.}$$

b) A vazão de vazamento é 15% daquela em 2, portanto (com $\epsilon = \text{folga}$, $D_m = 0,5 \times (100 + 97) = 98,5$)

$$V_v A_v = 0,15 V_2 A_2 \quad \therefore \quad V_v = 0,15 \frac{D_2^2}{4 D_m \epsilon} V_2 = 0,15 \frac{35^2}{4 \times 98,5 \times 1,5} \times 6,68 = 2,08 \text{ m/s } \textit{Resp.}$$

Exercício 1.2 Óleo ($\rho_o = 880 \text{ kg/m}^3$) escoia em regime permanente por uma curva de redução num duto como mostrado na figura. Calcular: a) a força atuando sobre os parafusos dos flanges; b) o sentido e direção da força calculada. Dados: $p_1 = 300 \text{ kPa}$, $p_2 = 150 \text{ kPa}$, $D_1 = 30 \text{ cm}$, $D_2 = 10 \text{ cm}$, $V_1 = 2 \text{ m/s}$. As seções 1 e 2 estão definidas na figura.

Desprezar os pesos da curva metálica e do óleo.

Solução:

Calculemos inicialmente o fluxo de massa e a velocidade em 2.

$$\dot{m} = (\rho VA)_1 = 880 \times 2 \times \frac{\pi}{4} 0,3^2 = 124,4 \text{ kg/s}$$

$$V_2 = \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1 = \frac{0,3^2}{0,1^2} \times 2 = 18 \text{ m/s}$$

a) Para o volume de controle sugerido ao lado [Eq. (2.2.21)]

$$\sum F = \sum_{out} (\dot{m} V) - \sum_{in} (\dot{m} V)$$

Admitindo que a resultante das forças que a curva exerce sobre o fluido é F_x

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 + F_x = -\dot{m} V_1 - \dot{m} V_2$$

$$\therefore F_x = -p_1 A_1 - p_2 A_2 - \dot{m} V_1 - \dot{m} V_2 = -(p_1 A_1 + \dot{m} V_1) - (p_2 A_2 + \dot{m} V_2)$$

logo

$$F_x = - \left[3 \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 0,3^2 + 1,5 \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 0,1^2 + 124,4 \times (2 + 18) \right] = -24,87 \text{ kN}$$

Esta é a força atuando sobre o fluido. A força que este exerce sobre a estrutura é de valor igual e sinal trocado, isto é

$$R_x = -F_x = 24,87 \text{ kN} \quad (2.536 \text{ kg}_f) \quad (\text{Resp.})$$

b) A força R_x atua na direção-x, no sentido positivo (uma vez que R_x é positivo), da esquerda para direita. Esta é a resultante das forças atuando sobre os parafusos se desprezarmos os pesos da estrutura e do fluido.

